生命保険数学入門

～死と隣り合わせの計算～

この文章は、私が生命保険会社に入社したときの近況報告を兼ねています。こんな計算をする仕事もあるんだということを知っていただければ幸いです。

保険料の基本

皆さんは保険というと何を思い浮かべますか？健康保険ですか？自動車保険、火災保険、医療保険、傷害保険、盗難保険ですか？いえいえ、やっぱり大事なのは、私は生命保険だと思います。誰かが死んだときにお金が下りるという契約のことです。あまり考えたくない話ではありますが、契約内容は例えば次のような対になります。

(1) A さんは生存している限り n 年後まで、毎年 (月) 保険会社に保険料 P 円を支払う。

(2) A さんが n 年以内に死亡したときには、保険会社は遺族に保険金 S 円を支払う。

「n 年」という期間が付いているので、このような保険を n 年満期定期保険といいます。払った保険料はまったく返ってこない掛け捨てで、よくあるのは、$n = 1, 10, 15, \cdots$ のものです。(2) の n について $n \to \infty$ とした場合は定期保険ではなく終身保険といい、いつかは死んで必ずお金が払われます。

さて、(1) と (2) の対による保険契約ですが、n と S を与えたときに、P はどのように決めればよいのでしょうか？「適当に多めに見積もっておけばいいんじゃないの？」とか、「他社の様子を見て決めればいいんじゃないの？」とか、「需要と供給のバランスで決めればいいんじゃないの？」という考え方も必ずしも間違いではありませんが、基本は、

保険会社の収入現価と支出現価が等しくなるように決める　…☆

です。実際には保険会社側も利益を出したいわけですが、この基本を押さえない限り、損失が出ないために最低限必要な保険料の水準さえわかりません。そこでこの文章では、保険会社側の利益や経費を考えずに、「死亡」という確率事象と「利息収入」だけをもとに、基本通りに P を求めてみたいと思います。ただし、よくある例として (1) では「毎年 (月)」としましたが、月払いは話が面倒になるので「毎年」の場合だけで話を進めさせてください。

生命表と死亡率

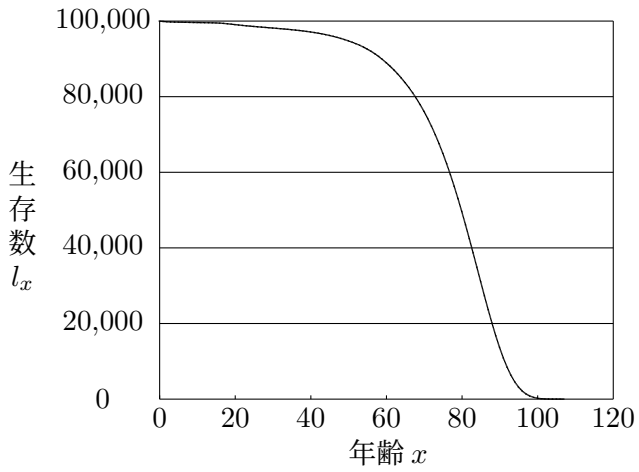
まず必要になるのは、A さんが一定の期間に死んでしまう確率、死亡率です。そんなことはわかるわけもないんですが、大雑把に言って、A さんの年齢と性別よって、死亡率は決

まってくると考えます。人間は年とともに死亡率が上がりますし、男性より女性の方が平均寿命が長いのは、女性の死亡率が低いからです。

さて、年齢と性別に注目して作られたデータとして、「生命表」というものを我々は使います。これは、今、10 万人の男性あるいは 10 万人の女性が同時に生まれたとすると、x 年後にはそのうちの何人が生き残っているかという推移を統計に基づいて表にしたものです。数学的に言えば単なる減少数列 $\{l_x\}$ で、$l_0 = 100,000,\ l_x = (x$ 年後の生存者数) となるもののことです。l_x は x 才まで残れる人の数を表していますが、統計的なモデルなので小数を含んでも構いません。男女のデータがありますが、どちらも l_x という記号で表します。また、l_x は x を大きくしていくといつかは 0 になるので、生命表はある年齢で打ち切られます。この年齢を ω とおくと、通常の生命表では $\omega = 106$〜120 くらいです。もちろん、$l_\omega = 0$ となっています。そして、この 10 万人のうち、x 年後から $x+1$ 年後の間の死亡者数は、

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

と書けます。以下に例として、生保標準生命表 1996(死亡保険用)(男) をグラフにしたものと、その値の一部を紹介します。



x	l_x	d_x
40	97,113	151
41	96,962	166
42	96,796	182
43	96,614	201
44	96,413	221
45	96,192	241
46	95,951	262
47	95,689	283
48	95,406	306
49	95,100	331
50	94,769	359

いま、A さんを 40 才男性とします。上の生命表を用いて、A さんは l_{40} 人の中の一人であると考えると、この l_{40} 人のうち、1 年間で d_{40} 人は死んでしまいます。よって、A さんがこれからの 1 年間に死んでしまう確率、死亡率は $\dfrac{d_{40}}{l_{40}} = \dfrac{151}{97,113} = 0.001555$ であると読み取れます。ちなみに、A さんがこれからの 10 年間で死なない確率は、$\dfrac{l_{50}}{l_{40}} = \dfrac{94,769}{97,113} = 0.9759$ です。

実際のところは、年齢別の死亡率が統計データとして先にあって、そこから生命表 $\{l_x\}$ が作られるのですが、扱いやすさの点から、保険料の計算では $\{l_x\}$ に基礎を置きます。

現価とは

保険会社は契約者から受け取った保険料を運用して、利息収入を得ます。しかしその利息はそのまま保険会社の利益になるのではなく、実はあらかじめ、その利息を見越した上で保

険料 P を安く設定しているのです。そこでの利率を以下 i とおき、また、現価率

$$v = \frac{1}{1+i}$$

という記号も用意しておきます。$i = 0.01$ と書いたら、利率 1%のことです。普通は $i > 0$ なので、$v < 1$ となっています。

1 年後に手元に 1 という額があるとすると、それは運用前の現在の価値、現価としては v である、と考えます。今 v があるからそれを運用して、1 年後には $v(1+i) = 1$ になっているのだというわけです。

$n = 1$ の場合の P

先程、P を計算するために A さんの死亡率が必要だと書いたのですが、実質的には A さんと同じ年齢、性別の人 l_x 人が同じ保険に入るとき、P をいくらにすればよいかを考えれば、確率的な記述を避け、わかりやすくなります。しかし、確率を使わない方法でもまだ難しいので、最初は (1)、(2) で $n = 1$ の場合を考えます。

いま、x 才男性 l_x 人が (1) と (2) の対からなる保険に同時に入るとします。まず、(1) によって、この集団は契約時に保険料 P をそれぞれ払います。$n = 1$ の年払なので保険会社の収入はこれで全部で、Pl_x 円となります。そして次に (2) です。l_x 人のうち、d_x 人が死んでしまい、保険会社は保険金 S をそれぞれに支払います。よって、保険会社の支出は全部で Sd_x 円となります。ここで、P を決めるために☆を使いたいのですが、$Pl_x = Sd_x$ とすると、利率 i が加味されていないので、少し違います。

全部で d_x 人が 1 年間で死んでしまいますが、契約直後に死んだ人への S 円と、1 年経過直前に死んだ人への S 円は価値が違います。契約直後の価値、現価で考えると、前者は S 円、後者は vS 円になり、前者の方が価値は高いことがわかります。これは、支払う時期が遅ければ遅いほど、保険会社が利息収入を多く得られることに対応しています。支払う時点の違う S について、現価の形で時点を合わせてから☆を使う必要があります。ただし実務的には、計算を簡略化するため、d_x 人全員が半年経過後に死んでしまうと近似して、現価として、$v^{\frac{1}{2}}S$ を使います。そうすると、保険会社の支出の現価は全部で $v^{\frac{1}{2}}Sd_x$ 円となります。

したがって、☆の方程式を現価で考えると、

$$\begin{aligned} Pl_x &= v^{\frac{1}{2}}Sd_x \\ P &= \frac{v^{\frac{1}{2}}d_x}{l_x}S \end{aligned}$$

が導かれます。

本番

さて次に、一般の n についてです。x 才男性 l_x 人が (1) と (2) の対からなる保険に同時に入るとして、以下、この閉じた集団の中だけで話を進めます。経過年数を表す変数 t を用意して、契約時を $t = 0$、満期時を $t = n$ とします。保険会社としての $0 \leq t < 1$ での収入と支出の現価は、$n = 1$ の場合と同じく、収入は Pl_x 円、支出は $v^{\frac{1}{2}}Sd_x$ 円となります。しかし、

P の決定はこの 1 年目の収支だけを見て行うのではなく、n 年間全体での収支が合うように行うので、まだ☆を使うには早いです。

$1 \leq t < 2$ での収入は、$t = 1$ での生存者 l_{x+1} 人からしか P を受け取れないので、$t = 1$ において Pl_{x+1} 円です。ただし、$t = 0$ での収入現価としては、vPl_{x+1} 円になります。同じく $1 \leq t < 2$ での支出は、死亡者 d_{x+1} 人に対する保険金 S で、ここでも近似的に、d_{x+1} 人は中間の $t = \frac{3}{2}$ で死んでしまうとして、$t = 0$ での支出現価は $v^{\frac{3}{2}}Sd_x$ 円となります。

以下、同様の計算を $n-1 \leq t < n$ まで繰り返すと、$t = 0$ での収入現価の和は $\displaystyle\sum_{t=0}^{n-1} v^t Pl_{x+t}$ 円、$t = 0$ での支出現価の和は $\displaystyle\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} Sd_{x+t}$ 円となります。どちらも $t = 0$ での現価なので、☆によって等号で結ぶことが許されて、結局、

$$\sum_{t=0}^{n-1} v^t Pl_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} Sd_{x+t}$$

という式が導かれました。つまり、

$$P = \frac{\displaystyle\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} d_{x+t}}{\displaystyle\sum_{t=0}^{n-1} v^t l_{x+t}} S$$

となるのです！

具体例

さて、やっとのことで P が求まったんですが、我々の感覚と合うような保険料が、この式から本当に出るんでしょうか？例えば、10 年満期定期保険 $(n = 10)$、保険金額 $S = 5,000$ 万円、40 歳男性 $(x = 40)$ の年払保険料 P を見てみます。利率は $1\%(i = 0.01)$ とし、データには先程の生保標準生命表 1996(死亡保険用)(男) を使うと、計算結果は $P = 119,377$ 円になります。ただ、保険料 P は年払ではなく、月払にしている方が多いと思います。今、求めた年払保険料を 12 で割った数値をおおよその月払保険料だと思うと、この例の場合、およそ月 1 万円程度になり、感覚的に納得できるものになっていると思います。

高いですか？高いですよね。それは、保険会社の人間も感じることがあります。保険料を引き下げる工夫があるといいのですが。

実務では

P を求める式は出たんですが、少し見づらいですよね。そこで実務では、基数という記号を用いて、P を扱いやすくしています。基数とは、

$$\begin{aligned}
D_x &= v^x l_x \ , \\
N_x &= D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{\omega-1} \ , \\
\overline{C}_x &= v^{x+\frac{1}{2}} d_x \ , \\
\overline{M}_x &= \overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \cdots + \overline{C}_{\omega-1}
\end{aligned}$$

で定義される複数の数列のことで、i と l_x によって決まります。また、P は S と比例するように決めるので、$S = 1$(無単位) としてしまいます。これらを使うと、先程の P について、

$$P = \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

と書ける事が容易にわかります。(It is easy to see...)

生命保険会社の利益

さて、今回は保険会社の経費を考えなかったわけですが、実際には予定事業費というものをいくらか上乗せして、実際の保険料になります。「経費って言うけど、結局は利益じゃないの？」と思う方もいるかもしれませんが、予定事業費のほとんどは、契約締結のための費用や、契約保全のための維持費に使われるので、保険会社の利益にはほとんどなりません。とはいえ、契約者から頂いた予定事業費から利益が出た場合、それを費差益と呼びます。

生命保険会社の利益には他に、死差益、利差益などがあります。死差益については、先程の生命表が関係します。あの表から導かれる死亡率は、予定死亡率といって、実際の死亡率より少しだけ高めに、安全めに見積もったものになります。したがって、あの表に基づいて計算した保険料を契約者から集めると、保険会社が支払う保険金総額は予定より少なくて済み、利益が生まれます。これが死差益であり、生命保険会社の一番大きな利益になります。

もう一つの利差益についてですが、これが問題です。先程の例のように、保険料は普通、その契約の締結時点の予定利率というものをもとに計算されています。契約締結後の運用実績が予定利率を上回れば、利差益が出るわけですが、最近は市中金利低下のために運用実績が予定利率を下回ることが多く、利差損が出ています。この状態を逆ザヤといい、多くの生命保険会社を苦しめています。

生命保険会社では、こんな計算もしています。これまで、定期保険の保険料に話を絞って生命保険数学を紹介しましたが、みなさん、興味は持っていただけましたか？参考文献には、二見隆「生命保険数学」(生命保険文化研究所) を用いました。

この分野で必要となる最低限の知識は、高校数学と確率・統計です。私が大学で専攻していた数学を直接この仕事に活かすことができないのは残念ですが、社会にとって必要な保険という制度を確率的に眺められる点で、おもしろい仕事だと私は感じています。

成川淳 (なるかわあつし)