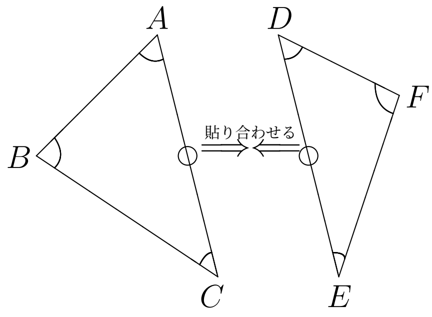
正弦定理による角度の決定について

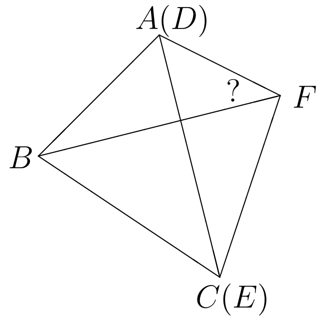
成川淳

正弦定理については、多くの皆さんがさほど関心もせずに素通りしてしまっているのではないかと思います。しかし、正弦定理は辺の長さの比を角の大きさの sin の比に変えてくれる便利な定理です。それについて高校時代に考えたことの一部を紹介します。

1　足し算・引き算では求まらない角

まず、左下の図のように二つの三角形があるとします。辺 AC と辺 DE の長さは等しく、どちらの三角形の角の大きさもすべて与えられているとします。さて、この 2 つの三角形の辺 AC と辺 DE を貼り合わせると、右下の図のように四角形ができますが、点 B と点 F の間に対角線を引いて新たにできる角 AFB の大きさはどうなるでしょうか？この角の大きさは一意的に定まっているはずですが、どうやら足し算・引き算だけでは求まらないようです。そこで、正弦定理を使ってこの角の大きさを求めてみようという話を以下で紹介します。



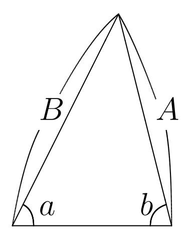


正弦定理とは下のような定理でした。以下ではこの定理しか使わないので、よく覚えておいてください。

正弦定理　右図のような三角形について、

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} \quad \text{すなわち、} \quad \frac{A}{B} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

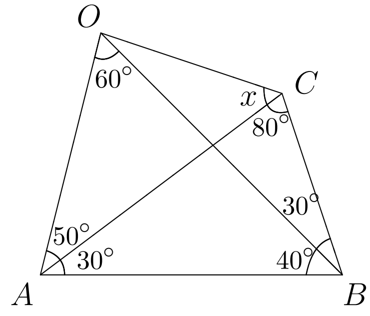
が成り立つ。



2　よくある角度の問題

次のような問題を考えます。

問題　右図のような四角形で、角 x の大きさを求めよ。
（O, A, B, C という記号は証明で使います。）



僕の考えた解答　まず、辺の長さに関する次のような恒等式を考える。

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1$$

ここで、左辺のそれぞれの項に対して、$\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ に正弦定理を適用して、

$$\frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot \frac{\sin(x+80^\circ)}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sin 50^\circ}{\sin x} = 1$$

が得られる。左辺を約分するため、それぞれの分子・分母を次のように書き換える。

$$\frac{\sin 40^\circ}{2\ \sin 40^\circ\ \cos 40^\circ} \cdot \frac{\sin(x+80^\circ)}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos 40^\circ}{\sin x} = 1$$

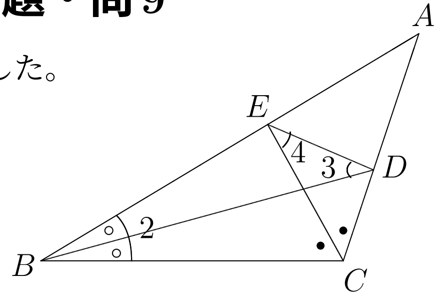
実際に約分すると簡単になって、

$$\sin(x+80^\circ) = \sin x$$

が得られる。ここで、$0 \leq x \leq 70^\circ$ より $x = 50^\circ$ が導かれる。 □

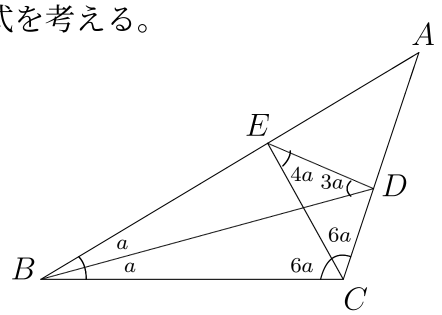
3　98年日本数学オリンピック予選問題・問9

数学オリンピック予選で、次のような問題がありました。



問題　右の図で、辺 BD, CE は $\angle B, \angle C$ の二等分線。さらに、$\angle ABC : \angle BDE : \angle CED = 2 : 3 : 4$ のとき、$\angle A$ は何度か？

僕の考えた解答　$\angle A$ については後から考えることにして、まず四角形 $EBCD$ に注目する。まず、$\angle EBD = a$ とおくと、足し算・引き算によって右下の図のように角の大きさを表せる。ここで、辺の長さに関する次のような恒等式を考える。



$$\frac{DE}{DB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{DC}{DE} = 1$$

さらに、左辺のそれぞれの項に対して、
$\triangle DEB, \triangle DBC, \triangle BCE$ に正弦定理を適用して、

$$\frac{\sin a}{\sin(180^\circ - 4a)} \cdot \frac{\sin 12a}{\sin a} \cdot \frac{\sin 4a}{\sin 6a} = 1$$

左辺を約分するため、それぞれの分子・分母を次のように書き換える。

$$\frac{\sin a}{\sin 4a} \cdot \frac{2 \sin 6a \cos 6a}{\sin a} \cdot \frac{\sin 4a}{\sin 6a} = 1$$

実際に約分すると簡単になって、

$$\cos 6a = \frac{1}{2}$$

が得られる。ここで、$0 \leq 6a \leq 90^\circ$ より、$6a = 60^\circ$、すなわち $a = 10^\circ$ が導かれる。

あとは足し算・引き算により、$\angle A = 40^\circ$ となる。 □

4　正弦定理を組み合わせて作った命題

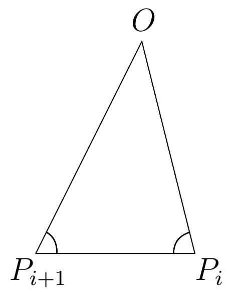
上記の 2 問について、「僕の考えた解答」は、かなり発見的な解法で不自然に感じる方もいるかもしれませんが、慣れてくると発見的ではありません。それは、僕が高校時代にこのような問題に熱中していた時期に、以下のような命題を考えついたからです。極端な方法ではありますが、上記の解法の拡張になっています。

命題　平面上に、点 O と n 個の点 P_1〜P_n があり、すべての i について、O, P_i, P_{i+1} が一直線上にないとき、

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin\angle OP_{i+1}P_i}{\sin\angle OP_iP_{i+1}} = 1$$

が成り立つ。ただし、$P_{n+1} = P_1$ とする。

注　$\prod$ は $\sum$ の仲間で、$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ という意味です。

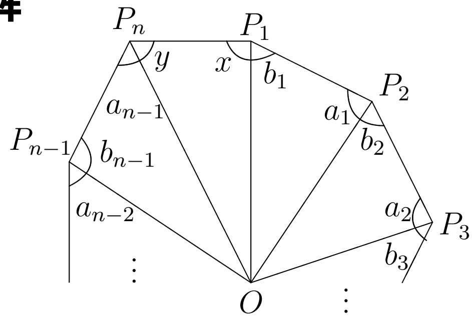


証明　正弦定理より、各 i について、$\dfrac{\sin\angle OP_{i+1}P_i}{\sin\angle OP_iP_{i+1}} = \dfrac{OP_i}{OP_{i+1}}$ であり、

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin\angle OP_{i+1}P_i}{\sin\angle OP_iP_{i+1}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{OP_i}{OP_{i+1}} \overset{\text{約分して}}{=} 1$$

となる。 □

5　上の命題による、角度問題の数値解



上の命題を実際に使ってみます。

いま、右のような図で、a_1〜a_{n-1}, b_1〜b_{n-1} が与えられているとき、x の大きさの数値解を求めたい。

（とりあえず、厳密解が得られるかどうかは考えない。）

まず内角の和を考えて、

$$x + y + \sum_{i=1}^{n-1} a_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i = 180^\circ(n-2)$$

がわかります。ここで、$180^\circ(n-2) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_i =: \theta$(既知定数) と置くと、$y = \theta - x$ と書けます。命題の式に a_i, b_i, x, θ を代入すると、

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sin a_i}{\sin b_i}\right) \cdot \frac{\sin x}{\sin(\theta - x)} = 1$$

となります。ここで、$\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sin a_i}{\sin b_i} =: C$(既知定数) と置いて式を解くと、

$$
\begin{aligned}
C\sin x &= \sin(\theta - x) \\
&= \sin\theta\cos x - \cos\theta\sin x \\
(C+\cos\theta)\sin x &= \sin\theta\cos x \\
\tan x &= \frac{\sin\theta}{C+\cos\theta}
\end{aligned}
$$

となります。x の範囲には、180° 以下で適当に制限がつきますから、x の数値解が求まります。(arctan で表してもよい。)

点 $O, P_1 \sim P_n$ の配置がぐちゃぐちゃでも、同様に数値解は求まります。大事なのは、点 O からすべての P_i に辺が伸びていて、それらが作る角が 1 箇所を除いてすべて与えられている事です。冒頭の四角形の問題に戻ってみると、$n=3$ として各頂点に適当に O, P_1, P_2, P_3 を割りふれば、「命題」が適用できて、すべての角の大きさが求まるわけです。

6　上記の命題による、パズル問題の解

さて、もう一度、最初の何問かに戻ってみましょう。これらの解答では、どれも $\tan x$ を求めるのではなくて、x についての方程式から式変形によって直接 x の値を得ることに成功しています。しかし、こんなことができたのは必然ではなく、偶然と考えた方が良いでしょう。数値解については必然的に求まることを示しましたが、パズルのような問題で、式がうまく整理できて厳密解が得られる保証はどこにもないからです。

実際、「よくある角度の問題」では、かなりきれいに約分ができているのですが、これも必然ではありません。問題の四角形で、どこの点を O に選んでも「命題」が適用できますが、どこを O として選ぶかで 4 通りの式が出てきます。左上以外の頂点を O として選ぶと、計算がかなり大変になります。(答えは一緒になるはずですが。) 実は僕が、4 通りの式をすべて挙げてみて、左上の頂点を O とするときの方程式が一番簡単に解けるとわかったので、それを使って「僕の考えた解答」を作ったのです。問題の数値が変わったら、方程式が簡単に解けるかどうかはわかりません。「数学オリンピック予選問題」もそうです。

しかし、僕が今までに出会った、「命題」が適用できる問題のすべては、うまく O を選べば計算がそれほど複雑にならずに、厳密な答えが出てくれました。あくまでも経験によるものですが、$n=3$ や $n=4$ のとき、あの「命題」はかなり使えます。逆に、点の数が多くなると、「命題」が適用できるような問題は少なくなってきます。ある 1 点から他の点に向かって辺がたくさん伸びていなければならないからです。

7　最後に

僕が正弦定理を好きな理由が少しは伝わりましたでしょうか?

「高校数学なんておもしろくない。早く大学でやるような数学をやりたい。」と言う高校生がたまにいますが、高校数学の中にもおもしろさは眠っていると僕は信じています。僕もそのおもしろさをほんのひとかじりしただけですから、他におもしろい話があったら、教えてもらえると嬉しいです。