年金数理公式集 (平成 17 年用)

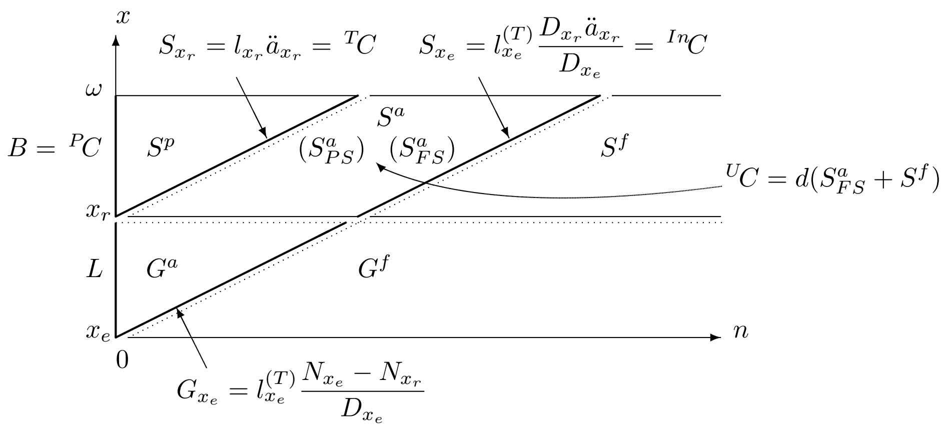
Trowbridge モデルによる給付現価と収入現価

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \\
L &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \\
S &= S^p + S^a + S^f \\
S^a &= S^a_{PS} + S^a_{FS} \\
S^p &= \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \ddot{a}_x \\
S^a &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x} \\
S^a_{PS} &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \frac{x-x_e}{x_r-x_e} \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x} \\
S^a_{FS} &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \frac{x_r-x}{x_r-x_e} \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x} \\
S^f &= \frac{v}{d}\, l_{x_e}^{(T)} \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}} = \frac{v\, {}^{In}C}{d} \\
l_{x_e}^{(T)} \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}} + S^f &= \frac{1}{d}\, l_{x_e}^{(T)} \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}} = \frac{{}^{In}C}{d} \\
S^a_{FS} + S^f &= \frac{1}{d} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \frac{1}{x_r-x_e} \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x} = \frac{{}^{U}C}{d} \\
S^a + S^f &= \frac{v}{d}\, l_{x_r}\ddot{a}_{x_r} = \frac{v\, {}^{T}C}{d} \\
l_{x_r}\ddot{a}_{x_r} + S^a + S^f &= \frac{1}{d}\, l_{x_r}\ddot{a}_{x_r} = \frac{{}^{T}C}{d} \\
S &= \frac{B}{d} = \frac{{}^{P}C}{d} \\
G &= G^a + G^f \\
G^a &= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \frac{N_x - N_{x_r}}{D_x} \\
G^f &= \frac{v}{d}\, l_{x_e}^{(T)} \frac{N_{x_e} - N_{x_r}}{D_{x_e}} \\
G &= \frac{L}{d}
\end{aligned}
$$

別表の補足

$$
\begin{aligned}
{}^{I}C_n &= \sum_{x=x_e+n-1}^{x_r-1} l_x^{(T)}\, {}^{I}P_{x-n+1} + \sum_{x=x_e}^{x_e+n-2} l_x^{(T)}\, {}^{E}P = {}^{E}PL + \sum_{x=x_e+n-1}^{x_r-1} l_x^{(T)} ({}^{I}P_{x-n+1} - {}^{E}P) \\
&\quad (n=1 \text{ では } S^p \text{ も加える}) \\
S^a - {}^{E}PG^a &= \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)}\, {}^{E}P \frac{N_{x_e} - N_x}{D_x} = \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} ({}^{I}P_x - {}^{E}P) \frac{N_x - N_{x_r}}{D_x}
\end{aligned}
$$

$l_x v^n$ **の集合と給付現価、収入現価、保険料**　$\ddot{a}_\infty = \dfrac{1}{d}$, $a_\infty = \dfrac{v}{d} = \dfrac{1}{i}$ に注意し、前頁の式を理解する。



$$x\text{ 歳の者の平均加入期間} = e_x = \frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1}(y-x+1)d_x + (x_r - x)l_{x_r}}{l_x} = \frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} l_y}{l_x} \quad \text{(期末脱退)}$$

残高の満たす漸化式　積立金 F、責任準備金 V、不足金 U、保険料 C、特別保険料 $\tilde{C}$、給付金 B、利率 i は以下の関係を持つ。予定値ではなく実際値には $'$ を付した。

＜保険料が期初払、給付金が期末払の場合＞

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= (V_n + C_n)(1+i) - B_n \\
F'_{n+1} &= (F_n + C_n + \tilde{C}_n)(1+i') - B'_n \\
U'_{n+1} &= (U_n - \tilde{C}_n) + \underbrace{\underbrace{(U_n - \tilde{C}_n)\, i}_{\text{期初不足金予定利息}} + \underbrace{\underbrace{(F_n + C_n + \tilde{C}_n)(i - i')}_{\text{利差損}} + \underbrace{(V'_{n+1} + B'_n - (V_n + C_n)(1+i))}_{\text{責準変動損益}}}_{\text{差損}}}_{\text{当期発生不足金}}
\end{aligned}$$

(H14 問 1(3) ではこの通りだが、H15 問 1(7) では当期発生不足金を差損としている。)

$$\text{極限方程式} \qquad F = \frac{vB - C}{d}$$

特に V, C, B が一定で $i' \neq i$ の場合

$$U'_{n+1} = (U_n - \tilde{C}_n)(1+i') + (V + C)(i - i')$$

＜保険料が期初払、給付金も期初払の場合＞

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= (V_n + C_n - B_n)(1+i) \\
F'_{n+1} &= (F_n + C_n + \tilde{C}_n - B_n)(1+i') \\
U'_{n+1} &= (U_n - \tilde{C}_n)(1+i) + (F_n + C_n + \tilde{C}_n - B_n)(i - i') + (V'_{n+1} - V_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\text{極限方程式} \qquad F = \frac{B - C}{d}$$

定理 (生命保険数学・第 6 章)　数列 $\{f_j\},\{g_j\},\{h_j\}_{j=1,\cdots,n}$ があり、$\{f_j\}$ は広義単調減少列、また、$\forall g_j \geq 0, \forall h_j \geq 0,$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} g_j > 0, \sum_{j=1}^{n} h_j > 0$ であるとする。

(1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{t} g_j \geq \sum_{j=1}^{t} h_j \quad (t < n)$,　$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} g_j = \sum_{j=1}^{n} h_j$ であると、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j g_j \geq \sum_{j=1}^{n} f_j h_j$ が成り立つ。

(2) $\dfrac{\sum_{j=1}^{t} g_j}{\sum_{j=1}^{n} g_j} \geq \dfrac{\sum_{j=1}^{t} h_j}{\sum_{j=1}^{n} h_j} \quad (t < n)$ であると、$\dfrac{\sum_{j=1}^{n} f_j g_j}{\sum_{j=1}^{n} g_j} \geq \dfrac{\sum_{j=1}^{n} f_j h_j}{\sum_{j=1}^{n} h_j}$ が成り立つ。

(3) $\forall h_j > 0$ で、$\left\{\dfrac{g_j}{h_j}\right\}$ が広義単調減少列であると、$\dfrac{\sum_{j=1}^{n} f_j g_j}{\sum_{j=1}^{n} g_j} \geq \dfrac{\sum_{j=1}^{n} f_j h_j}{\sum_{j=1}^{n} h_j}$ が成り立つ。

系 (こちらが有用)　$\forall f_j > 0, \forall g_j > 0, \forall h_j > 0$ で、$\{f_j\},\left\{\dfrac{g_j}{h_j}\right\}$ は減少列であると、次が成り立つ。

(1)
$$\frac{\sum_{j=1}^{n} f_j g_j}{\sum_{j=1}^{n} f_j h_j} > \frac{\sum_{j=1}^{n} g_j}{\sum_{j=1}^{n} h_j}$$

(2)
$$\frac{g_1}{h_1} > \frac{\sum_{j=1}^{t} g_j}{\sum_{j=1}^{t} h_j} > \frac{\sum_{j=1}^{n} g_j}{\sum_{j=1}^{n} h_j} > \frac{\sum_{j=t}^{n} g_j}{\sum_{j=t}^{n} h_j} > \frac{g_n}{h_n}$$

命題 (こちらも有用)　$\forall f_j > 0, \forall g_j > 0$ とすると、次が成り立つ。

$$\max_{1\leq j\leq n} f_j > \frac{\sum_{j=1}^{n} f_j g_j}{\sum_{j=1}^{n} g_j} > \min_{1\leq j\leq n} f_j$$

財政方式	1 人あたり (標準) 保険料 P	保険料総額 C	責任準備金 V	備考
賦課方式 P (Pay-as-you-go Method)	受給者 1 人あたり 1	B	0	
退職時年金現価積立方式 T (Terminal Funding Method)	退職者 1 人あたり $\ddot{a}_{x_r}$	$l_{x_r}\ddot{a}_{x_r}$	$S^p - l_{x_r}\ddot{a}_{x_r}$	
単位積立方式 U (Unit Credit Method)	$\dfrac{1}{x_r - x_e}\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$ 年齢別	$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}\,{}^{U}P_x = d(S_{FS}^a + S^f)$	$S^p + S_{PS}^a$	${}^{U}C$ の等号は非自明
平準積立方式 L (Level Premium Method)	$\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_{x_e} - N_{x_r}} = \dfrac{S_{x_e}}{G_{x_e}} = \dfrac{S^f}{G^f}$	${}^{L}PL$	$S^p + S^a - {}^{L}PG^a$	
加入年齢方式 E ※ (Entry Age Normal Cost Method)	$\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_{x_e} - N_{x_r}} = \dfrac{S_{x_e}}{G_{x_e}} = \dfrac{S^f}{G^f}$	${}^{E}PL$	$S^p + S^a - {}^{E}PG^a$	定常状態で平準積立方式と同義、 $S^a - {}^{E}PG^a$ の別表示は別記
個人平準保険料方式 I ※ (Individual Level Premium Method)	$\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_x - N_{x_r}}$ 発足時年齢別	${}^{I}C_n$ 別記		加入年齢方式に収束
総合保険料方式 C ※ (Closed Aggregate Cost Method)	$\dfrac{S^p + S^a - {}^{C}F_n}{G^a}\left(= {}^{E}P + \dfrac{{}^{E}V}{G^a}\right)$ 年度毎	${}^{C}P_nL$		加入年齢方式に収束、 特別保険料なし
到達年齢方式 A ※ (Attained Age Normal Cost Method)	$\dfrac{S^p + S^a - {}^{A}F_n - {}^{A}U_n}{G^a}\left(= \dfrac{S_{FS}^a}{G^a}\right)$ 年度毎	${}^{A}P_nL$		加入年齢方式に収束、 ${}^{A}U_1 = S^p + S_{PS}^a$ 分の特別保険料
加入時積立方式 In (Initial Funding Method)	新規加入者 1 人あたり $\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$	$l_{x_e}^{(T)}\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$	$S^p + S^a - l_{x_e}^{(T)}\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$	
完全積立方式 Co (Complete Funding Method)	0	0	S	
開放型総合保険料方式 O (Open Aggregate Cost Method)	$\dfrac{S^p + S^a + S^f}{G^a + G^f} = \dfrac{B}{L}$ 発足時	${}^{O}PL = {}^{P}C$	0	定常状態では保険料は一定、 特別保険料なし
	$\dfrac{S^a + S^f}{G^a + G^f} = \dfrac{v\,{}^{T}C}{L}$ 発足時	${}^{O}PL = v\,{}^{T}C$	S^p	〃
	$\dfrac{S_{FS}^a + S^f}{G^a + G^f} = \dfrac{{}^{U}C}{L}$ 発足時	${}^{O}PL = {}^{U}C$	$S^p + S_{PS}^a$	〃
	$\dfrac{S^f}{G^a + G^f} = \dfrac{v\,{}^{In}C}{L}$ 発足時	${}^{O}PL = v\,{}^{In}C$	$S^p + S^a$	〃
開放基金方式 OAN (Open Aggregate Normal Cost Method)	$\dfrac{S_{FS}^a + S^f}{G^a + G^f} = \dfrac{{}^{U}C}{L}$	${}^{OAN}PL = {}^{U}C$	$S^p + S_{PS}^a = {}^{U}V$	厚生年金基金の基本部分、 財政再計算に注意

※印以外の項では定常状態を仮定した。また、すべて $F_1 = 0$ を仮定し、初年度での値を ( ) 内に記した。