「多重化展覧会」

成川淳（なるかわあつし）

私の周りには、数学ができる人がたくさんいます。そんな中で、私のような者が勉強・研究している内容を紹介しようという気には今までなれなかったのですが、最近になってやっと、自分の研究してきたことに自信を持てるようになってきました。修士論文の英訳が海外の論文誌に掲載され [1]、他の数学者の論文で引用される例も出てきたからです。今回は、数学の世界で多重化と呼ばれる様々な対象を私の知る範囲で紹介し、その上で私の論文の内容も紹介します。後半は複素関数論の知識を前提としますので、前半の多重化の紹介を眺めていただくだけでも嬉しく思います。

1　研究の経緯

私がいた研究室は、早稲田大学の上野喜三雄先生の研究室で、無限可積分系、あるいは代数解析という分野で主な活動をしています。そこでは、微分方程式や代数方程式の解の構造を調べる研究や、そこから派生した代数的、解析的な研究が多いように思います。私自身は、大学 4 年である種の微分作用素環を研究し、修士 1 年では量子群という代数を学んでいました。量子群そのもので新しい結果を出すことは難しいということで、修士 2 年から、解析的差分方程式と多重サイン関数、テータ関数の研究を始めました。ある種の方程式の解を構成する上で、多重サイン関数やテータ関数が重要な役割を担うことがありますが、私はそれらの関数自体を研究することに特化したわけです。修士 1 年まで代数ばかり勉強していた私にとって、解析的な対象への転向は不安だったのですが、自分の手元にあったいくつかの論文がうまく結びつき、運良く自分なりの結果を残せたのだと思います。

2　「多重化展覧会」

しばらく定義の連続となりますが、多重化と呼ばれるものをたくさん紹介し陳列することで、多重化に対するイメージを皆さんにお伝えしたいと思います。ある対象を多重化する場合、いくつかの方法が並存する場合がありますが、私の知る範囲で書かせていただきます。

2.1　ゼータ関数の多重化

ゼータ関数というと、まず次の式が思い浮かべられると思います。

$$\textbf{Riemann's Zeta Function}: \quad \zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{1}$$

しかし、この関数を別の角度から研究するため、変数 z を増やした次の関数が考えられました。

$$\textbf{Hurwitz' Zeta Function}: \quad \zeta(s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^s} \tag{2}$$

この関数にパラメータを複数導入したものが次の多重ゼータ関数 $\zeta_r(s,z|\underline{\omega})$ です。厳密には、まず収束性のために、$\omega_1,\cdots,\omega_r\in\mathbb{C}$ のすべてが、原点を通るある直線に関して同じ側にあるとします。通常は $\mathrm{Re}\,\omega_j>0\ (\forall j)$、あるいは $\omega_1=\cdots=\omega_r=1$ としておくことが多いです。そして、$\underline{\omega}=(\omega_1,\cdots,\omega_r)$ とおくと、$z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}\,s>r$ に対して次の無限級数で関数を定義できます。

$$\textbf{Multiple Zeta Function}: \quad \zeta_r(s,z|\underline{\omega})=\sum_{n_1,\cdots,n_r=0}^{\infty}\frac{1}{(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+z)^s} \tag{3}$$

この無限級数について和の取り方を変えることで、まず次の関係式を容易に確認できます。

$$\zeta_r(s, z+\omega_i|\omega_1,\cdots,\omega_r) = \zeta_r(s,z|\omega_1,\cdots,\omega_r) - \zeta_{r-1}(s,z|\omega_1,\cdots,\overset{\vee}{\omega}_i,\cdots,\omega_r) \tag{4}$$

ここで、$\overset{\vee}{\omega}_i$ は ω_i を除くという意味です。実はこの性質が多重ガンマ関数や多重サイン関数に引き継がれ、興味深い階級構造を作り出すことになります。以上の定義は Barnes(バーンズ) という人の 100 年前の研究から始まるもので、対称性の高さから様々な応用が考えられます。

一方で、Euler も研究していたと言われるのが次の多重ゼータ値です。

$$\textbf{Multiple Zeta Value}: \quad \zeta(k_1,k_2,\cdots,k_r) = \sum_{n_1>\cdots>n_r>0}^{\infty} \frac{1}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}} \tag{5}$$

($k_1,k_2,\cdots,k_r$ を逆に並べる流派もあります。) こちらについては例えば $r=1,2$ のものの間で、

$$\zeta(p)\zeta(q) = \zeta(p,q)+\zeta(q,p)+\zeta(p+q)$$

が成り立ちます。無限級数の和を取る部分で制限があるからこそ、このような関係式が多く潜んでいるようです。また、量子群の研究にも登場し、再び注目を浴びました。(3) と (5) は多重化の方向性が異なるにも関わらず、どちらも数理物理や解析的整数論で一定の地位を築きつつあります。

2.2 ガンマ関数の多重化

数学以外で登場することも多いガンマ関数については、次のように定義することができます。

$$\begin{aligned}\textbf{Gamma Function}: \quad \Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right\}\end{aligned} \tag{6}$$

積分表示と無限積表示が一致することについては説明を省略しますが、ガンマ関数の基本的な性質の一つです。さて、この関数の最も顕著な特徴は、部分積分などで得られる次の関数等式でしょう。

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

歴史的には、まず $\Gamma(x)$ の二重化として、$G(x+1)=\Gamma(x)G(x)$ をみたす関数 $G(x)$ が登場し、G-function あるいは Double Gamma Function と呼ばれました。(6) のような無限積を使って、この延長で多重ガンマ関数を構成することもできるのですが、ここでは $\Gamma(x)$ に微修正を加えた上での多重化を紹介します。(2) および (3) のゼータ関数は s に関して正則（　微分可能）で、また実は、解析接続という手法により、$s=0$ でも定義されていると思うことができます。そこでまず、ガンマ関数について次のような等式が成り立つという事実に注目します。

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,z)\Big|_{s=0}\right)$$

係数 $\sqrt{2\pi}$ を無視し、さらに、パラメータ $\underline{\omega}$ を追加して多重ガンマ関数を次の式で定義します。

$$\textbf{Multiple Gamma Function}: \quad \Gamma_r(z|\underline{\omega}) = \exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,z|\underline{\omega})\Big|_{s=0}\right) \tag{7}$$

$\zeta_r(s,z|\underline{\omega})$ の差分関係式 (4) が指数関数を通じて積の式に変わり、次の式が成り立ちます。

$$\Gamma_r(z+\omega_j|\omega_1,\cdots,\omega_r) = \Gamma_r(z|\omega_1,\cdots,\omega_r)\ \Gamma_{r-1}(z|\omega_1,\cdots,\overset{\vee}{\omega}_i,\cdots,\omega_r)^{-1} \tag{8}$$

この式で多重ガンマ関数の階級が特徴付けられています。これらの研究も、実質的に Barnes によって行われています。

2.3　サイン関数の多重化

多重サイン関数の定義には、相補公式と呼ばれる次の式を真似ることを考えます。

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin \pi s}$$

すなわち、多重ガンマ関数を使って、次のような定義を考えます。

$$\textbf{Multiple Sine Function}: \quad S_r(z|\underline{\omega})=\Gamma_r(z|\underline{\omega})^{-1}\ \Gamma_r(\omega_1+\cdots+\omega_r-z|\underline{\omega})^{(-1)^r} \tag{9}$$

後で確認しますが、次の式で、$S_r(z|\underline{\omega})$ が sin の拡張であることを納得できます。

$$S_1(z|\omega_1)=2\sin\frac{\pi z}{\omega_1}$$

また、定義 (8) と (9) によって容易に導かれる次の差分関係式も、階級を特徴付ける重要な性質です。

$$S_r(z+\omega_j|\omega_1,\cdots,\omega_r)=S_r(z|\omega_1,\cdots,\omega_r)\ S_{r-1}(z|\omega_1,\cdots,\overset{\vee}{\omega_i},\cdots,\omega_r)^{-1}$$

なお、$r=2$ の場合の $S_2(z|\omega_1,\omega_2)$ は Double Sine Function と呼ばれ、数理物理のモデルを表現する道具として使われることもあるようです。

以上の定義 (9) は東工大の黒川信重先生によるものですが、黒川先生は次のような定義 (10) も考案しています。(9) と (10) の定義の関係、そして、ゼータ関数との関係が興味深いです。

$$\tilde{S}_r(z)=\exp\left(\int_0^z \pi t^{r-1}\cot(\pi t)\ dt\right) \tag{10}$$

2.4　対数関数の多重化

同じく高校数学で登場する log については、$|x|<1$ のときに次の無限級数で書くことができます。

$$-\log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \tag{11}$$

そして、一部の分野では、これを多重化したポリログという次の関数も有名です。

$$\textbf{Polylogarithm}: \quad \mathrm{Li}_k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^k} \tag{12}$$

$k=2$ の場合はダイログ (Dilogarithm) と呼ばれます。この関数は式の形からゼータ関数 (1) に関係するだけではなく、さらに、多重ゼータ値 (5) と同様に次のような多重化がなされます。

$$\textbf{Multiple Polylogarithm}: \quad \mathrm{Li}_{k_1,k_2,\cdots,k_r}(x)=\sum_{n_1>\cdots>n_r>0}\frac{x^{n_1}}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}} \tag{13}$$

一方でポリログ (12) に対して、q 類似という発想で次のような変形版も考えられました。

$$q\textbf{-Polylogarithm}: \quad \mathrm{Li}_r(x;q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(1-q^n)^{r-1}} \tag{14}$$

そして、分母の $r-1$ 乗の項の中にある q を $\underline{q}=(q_0,\cdots,q_{r-2})$ という複数のパラメータで置き換え、次のように定義を一般化します。これも一種の多重化と考えることができます。

$$\textbf{Generalized } q\textbf{-Polylogarithm}: \quad \mathrm{Li}_r(x;\underline{q})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\prod_{j=0}^{r-2}(1-q_j^n)} \tag{15}$$

(13),(14),(15) などの関数は、1970 年代から多くの研究がなされているように思います。(15) よりは (13) の方が有名なように感じますが、(15) は $S_r(z|\underline{\omega})$ と密接な関係にあります。

2.5 ベルヌーイ多項式の多重化

ベルヌーイ数 B_n という数列については、ふとした場面で登場することが多いため、ご存じの方も多いと思います。B_n は例えば、こんな式の中で登場します。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^k &= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{k!}{j!(k+1-j)!}\ B_{k+1-j}\ n^j \qquad (n \in \mathbb{N}),\\ \zeta(2n) &= \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!} B_{2n} \qquad (n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

B_n は次の母関数で定義するのが容易です。

$$\textbf{Bernoulli Number}: \quad \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \tag{16}$$

左辺は $t \to 0$ の極限で 1 に収束しますので、$t = 0$ でテーラー展開可能です。その係数を使って B_n を決めるのです。実際に計算すると、$B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, \cdots$ となります。さて、多重化を考えたいのは、この数列ではなく、次の母関数によるベルヌーイ多項式についてです。

$$\textbf{Bernoulli Polynomial}: \quad \frac{te^{zt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z) \frac{t^n}{n!} \tag{17}$$

多項式 $B_n(z)$ は z の n 次式で、これも古くから知られています。そして、Barnes が多重ゼータ関数 (3) や多重ガンマ関数 (7) を研究する中で、(17) の多重化もすでに考えれらているのが驚きです。

$$\textbf{Multiple Bernoulli Polynomial}: \quad \frac{t^r e^{zt}}{\prod_{j=1}^{r}(e^{\omega_j t} - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{r,n}(z|\underline{\omega}) \frac{t^n}{n!} \tag{18}$$

定義が複雑ですが計算例を紹介すると、$r = n$ の場合は次のような式になります。

$$\begin{aligned}B_{1,1}(z|\omega_1) &= \frac{z}{\omega_1} - \frac{1}{2}\ ,\\ B_{2,2}(z|\omega_1,\omega_2) &= \frac{z^2}{\omega_1\omega_2} - \frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1\omega_2} z + \frac{\omega_1^2+\omega_2^2+3\omega_1\omega_2}{6\omega_1\omega_2}\ ,\\ B_{3,3}(z|\omega_1,\omega_2,\omega_3) &= \frac{z^3}{\omega_1\omega_2\omega_3} - \frac{3(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}{2\omega_1\omega_2\omega_3} z^2 + \frac{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2+3\omega_1\omega_2+3\omega_2\omega_3+3\omega_3\omega_1}{2\omega_1\omega_2\omega_3} z\\ &\quad - \frac{(\omega_1+\omega_2+\omega_3)(\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_3\omega_1)}{4\omega_1\omega_2\omega_3}\end{aligned}$$

$B_{r,n}(z|\underline{\omega})$ は、z に関して n 次の多項式で、また、$\omega_1, \cdots, \omega_r$ に関して対称です。対称性の高い定義 (18) から、いくつもの美しい性質が導かれるのですが、ここでは次の 1 つだけ紹介します。

$$B_{r,n}(z+\omega_j|\omega_1,\cdots,\omega_r) - B_{r,n}(z|\omega_1,\cdots,\omega_r) = nB_{r-1,n-1}(z|\omega_1,\cdots,\check{\omega}_i,\cdots,\omega_r)$$

なお、$\omega_1 = \cdots = \omega_r = 1$ とすると次の式が成り立ち、組み合わせ論的な魅力も感じられます。

$$B_{r+1,r}(z|1,\cdots,1) = (z-1)\cdots(z-r) = r!\binom{z-1}{r}$$

また、多重化に際して Poly-Bernolli Number というものも存在するようです。私は詳しくないのですが、ポリログ (12) を使って次の母関数で定義されるようです。

$$\textbf{Poly-Bernoulli Number}: \quad \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} \tag{19}$$

2.6 テータ関数の多重化

ここでは、テータ関数という関数の多重化として、Multiple Elliptic Gamma Function を紹介します。私の研究室の先輩の西澤道知さんが発表し、まだ応用例も少ないため多重化自体の知名度は低いのですが、興味深い対象です。多重化のもととなるテータ関数は通常、次のように定義されます。

$$\textbf{Theta Function}: \quad \theta(z,\tau) = -\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\{(j+1/2)^2\tau+(2j+1)(z+1/2)\}}$$
$$= ie^{\pi i(\tau/4-z)}\prod_{j=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i((j+1)\tau-z)})(1-e^{2\pi i(j\tau+z)})(1-e^{2\pi i(j+1)\tau}) \tag{20}$$

収束性のために $\mathrm{Im}\,\tau>0$、つまり、$|e^{\pi i\tau}|<1$ を仮定します。無限級数表示と無限積表示が一致することについては説明を省略しますが、テータ関数の基本的な性質の一つです。さて、この関数の変数 z に関する性質のみを抜き出すために、無限積の一部を取り出して、次の関数を定義します。

$$\theta_0(z,\tau) = \prod_{j=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i((j+1)\tau-z)})(1-e^{2\pi i(j\tau+z)})$$

さらに、解析的差分方程式という立場から、ガンマ関数と類似の関係式

$$u(z+1)=u(z), \quad u(z+\sigma)=\theta_0(z,\tau)u(z)$$

を満たす関数 $u(z)$ を考えます。そこで登場してくるのが次の関数です。

$$\textbf{Elliptic Gamma Function}: \quad \Gamma(z,\tau,\sigma) = \prod_{j,k=0}^{\infty}\frac{1-e^{2\pi i((j+1)\tau+(k+1)\sigma-z)}}{1-e^{2\pi i(j\tau+k\sigma+z)}} \tag{21}$$

これらの多重化を考えます。$z\in\mathbb{C}$ と $\mathrm{Im}\,\tau_j>0\ (\forall j)$ に対して、$\underline{\tau}=(\tau_0,\cdots,\tau_r)$ とおき、

$$\textbf{Multiple Elliptic Gamma Function}:$$
$$G_r(z|\underline{\tau}) = \prod_{j_0,\cdots,j_r=0}^{\infty}(1-e^{2\pi i(-z+\tau_0(j_0+1)+\cdots+\tau_r(j_r+1))})(1-e^{2\pi i(z+\tau_0 j_0+\cdots+\tau_r j_r)})^{(-1)^r} \tag{22}$$

とします。当然、$\theta_0(z,\tau)=G_0(z|\tau)$, $\Gamma(z,\tau,\sigma)=G_1(z|\tau,\sigma)$ であり、また、次が成り立ちます。

$$\begin{aligned} G_r(z+1|\tau_0,\cdots,\tau_r) &= G_r(z|\tau_0,\cdots,\tau_r)\ , \\ G_r(z+\tau_j|\tau_0,\cdots,\tau_r) &= G_{r-1}(z|\tau_0,\cdots,\overset{\vee}{\tau_j},\cdots,\tau_r)\ G_r(z|\tau_0,\cdots,\tau_r) \end{aligned}$$

個人的には、この関数は Multiple Elliptic Gamma Function という呼び名よりも、Multiple Theta Function という呼び名の方がふさわしいと思っています。あるいは、(9) と (22) の類似から、これには Gamma ではなく Sine の名を与えるべきかもしれません。しかしながら、先人の研究の流れに従い、$G_r(z|\underline{\tau})$ を Multiple Elliptic Gamma Function と呼ぶことにしています。

ところで、$\theta_0(z,\tau), \Gamma(z,\tau,\sigma)$ については、モジュラー関係式と呼ばれる次の式が知られています。

$$\theta_0\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) = \exp\left\{\pi i\left(\frac{z^2}{\tau}+\frac{z}{\tau}-z+\frac{\tau}{6}+\frac{1}{6\tau}-\frac{1}{2}\right)\right\}\theta_0(z,\tau) \tag{23}$$
$$\Gamma\left(\frac{z}{\sigma},\frac{\tau}{\sigma},-\frac{1}{\sigma}\right) = \exp\{\pi i Q(z;\tau,\sigma)\}\ \Gamma\left(\frac{z-\sigma}{\tau},-\frac{\sigma}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)\Gamma(z,\tau,\sigma) \tag{24}$$

ここで、$Q(z;\tau,\sigma)$ はパラメータ τ,σ を持つ z に関する 3 次式として、複雑ですが具体的に与えられています。(23) は、最初の定義 (20) の $\theta(z,\tau)$ に対して古くから知られる次の関係式と同値です。

$$\theta\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) = -i\sqrt{-i\tau}\exp\left\{\frac{\pi i z^2}{\tau}\right\}\theta(z,\tau)$$

そして (24) は、1999 年に Felder と Varchenko という人が導いたものです。実は、

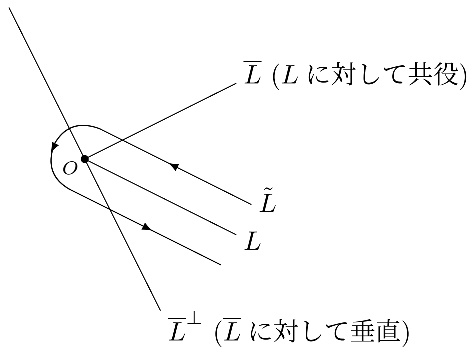
$$Q(z;\tau,\sigma) = -\frac{1}{3}B_{3,3}(z|\tau,\sigma,-1)$$

が成り立つのですが、これを初めて指摘したのが私です。また、Felder,Varchenko とは別の方法で一般の $G_r(z|\underline{\tau})$ のモジュラー関係式を導いたのが私の修士論文です。

3　私の論文の紹介

3.1　Multiple Sine Function $S_r(z|\underline{\omega})$ の積分表示と無限積表示

$S_r(z|\underline{\omega})$ は (9) で定義されるのですが、ここでは、その積分表示を紹介します。導く手順は面倒なので、代わりに鍵となる 2 つの式だけを紹介します。パラメータ $\omega_1,\cdots,\omega_r$ は、右図の直線 $\overline{L}^{\perp}$ に関して半直線 $\overline{L}$ と同じ側に分布していると仮定しています。また、以下の積分で、γ はオイラー定数と呼ばれる実数です。

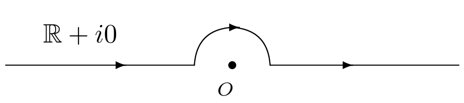


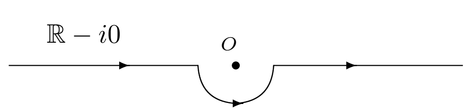
$$\begin{aligned}
\zeta_r(s,z|\underline{\omega}) &= -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\tilde{L}} \frac{e^{-zt}(-t)^{s-1}}{\prod_{j=1}^{r}(1-e^{-\omega_j t})}dt\ , \\
\Gamma_r(z|\underline{\omega}) &= \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{L}} \frac{e^{-zt}\{\log(-t)+\gamma\}}{t\prod_{j=1}^{r}(1-e^{-\omega_j t})}dt\right\}
\end{aligned}$$

上記の $\Gamma_r(z|\underline{\omega})$ の式には log が登場するのですが、分岐という概念に注意して (9) に式変形を重ねると、$S_r(z|\underline{\omega})$ については log の登場しない、次のようなきれいな定理が成り立ちます。オイラー定数 γ も消えています。そして逆に、この定理で $S_r(z|\underline{\omega})$ が定義されていると思うこともできます。

定理　(i)　$c \neq 0$ なる $\forall c \in \mathbb{C}$ に対して、$S_r(cz|c\underline{\omega}) = S_r(z|\underline{\omega})$ が成り立つ。
(ii)　$0 < \mathrm{Re}\,\omega_j\ (\forall j)$, $0 < \mathrm{Re}\,z < \mathrm{Re}\,(\omega_1+\cdots+\omega_r)$ のとき、$S_r(z|\underline{\omega})$ は次の積分表示を持つ。

$$\begin{aligned}
S_r(z|\underline{\omega}) &= \exp\left\{(-1)^r\quad\frac{\pi i}{r!}B_{r,r}(z|\underline{\omega}) + (-1)^r\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{zt}}{t\prod_{j=1}^{r}(e^{\omega_j t}-1)}dt\right\} && (25)\\
&= \exp\left\{(-1)^{r-1}\frac{\pi i}{r!}B_{r,r}(z|\underline{\omega}) + (-1)^r\int_{\mathbb{R}-i0}\frac{e^{zt}}{t\prod_{j=1}^{r}(e^{\omega_j t}-1)}dt\right\} && (26)
\end{aligned}$$





上記の被積分関数の極は、分母が 0 となる点 $\left\{\frac{2\pi i n}{\omega_k}\middle| n\in\mathbb{Z}, 1\le k\le r\right\}$ で、そこでの留数は、

$$\operatorname*{Res}_{t=\frac{2\pi i n}{\omega_k}} \frac{e^{zt}}{t\prod_{j=1}^{r}(e^{\omega_j t}-1)} = \frac{e^{2\pi i n z/\omega_k}}{2\pi i n\prod_{j=1,j\neq k}^{r}(e^{2\pi i n\omega_j/\omega_k}-1)}$$

となります。さて、留数定理を使って $S_1(z|\omega_1) = 2\sin\frac{\pi z}{\omega_1}$ を確かめてみましょう。(25) で $r=1$ とし、積分路 $\mathbb{R}+i0$ を上へ平行移動しつつ、極をまたぐたびに留数を拾っていくのです。収束性のた

めに $\mathrm{Im}\,\frac{z}{\omega_1} > 0$ として、上半平面の留数をすべて足し合わせると、次のようになります。

$$\begin{aligned}\exp\left\{-\int_{\mathbb{R}+i0}\frac{e^{zt}}{t(e^{\omega_1 t}-1)}dt\right\} &= \exp\left\{-2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{t=\frac{2\pi i n}{\omega_1}}\frac{e^{zt}}{t(e^{\omega_1 t}-1)}\right\}\\ &= \exp\left\{-2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n z/\omega_1}}{2\pi i n}\right\}\\ &= \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i n z/\omega_1}}{n}\right\}\\ &= 1-e^{2\pi i z/\omega_1}\end{aligned}$$

最後の等式には (11) を使いました。さらに (25) に、$B_{1,1}(z|\omega_1)=\frac{z}{\omega_1}-\frac{1}{2}$, $e^{\pi i/2}=i$ も使うと、

$$S_1(z|\omega_1)=\exp\left\{-\pi i\left(\frac{z}{\omega_1}-\frac{1}{2}\right)\right\}(1-e^{2\pi i z/\omega_1})=2\cdot\frac{e^{\pi i z/\omega_1}-e^{-\pi i z/\omega_1}}{2i}=2\sin\frac{\pi z}{\omega_1}$$

が導けます。これが Multiple Sine の名前の由来です。

さて、実は私が導きたいのはこれではなく、$r\geq 2$ の場合の $S_r(z|\underline{\omega})$ の無限積表示です。同様の留数計算で導かれるのですが、驚くべきなのは、上半平面の留数を足しあわす方法と、下半平面の留数を足しあわす方法で、2 つの異なる表示が出てくるという事実です。Generalized q-Polylogarithm (15) をうまく使って計算ができて、例えば $r=2,3$ の結果は次のようになります。

例 $\mathrm{Im}\,\frac{\omega_1}{\omega_2}, \mathrm{Im}\,\frac{\omega_1}{\omega_3}, \mathrm{Im}\,\frac{\omega_2}{\omega_3} > 0$ のとき、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}S_2(z|\omega_1,\omega_2) &= \exp\left\{+\frac{\pi i}{2}B_{2,2}(z|\omega_1,\omega_2)\right\}\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1-e^{2\pi i(z/\omega_2+j\omega_1/\omega_2)}}{1-e^{2\pi i(z/\omega_1-(j+1)\omega_2/\omega_1)}}\\ &= \exp\left\{-\frac{\pi i}{2}B_{2,2}(z|\omega_1,\omega_2)\right\}\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1-e^{2\pi i(-z/\omega_1-j\omega_2/\omega_1)}}{1-e^{2\pi i(-z/\omega_2+(j+1)\omega_1/\omega_2)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&S_3(z|\omega_1,\omega_2,\omega_3)\\ &=\exp\left\{-\frac{\pi i}{6}B_{3,3}(z|\underline{\omega})\right\}\prod_{j,k=0}^{\infty}\frac{(1-e^{2\pi i(z/\omega_1-(j+1)\omega_2/\omega_1-(k+1)\omega_3/\omega_1)})(1-e^{2\pi i(z/\omega_3+j\omega_1/\omega_3+k\omega_2/\omega_3)})}{1-e^{2\pi i(z/\omega_2+j\omega_1/\omega_2-(k+1)\omega_3/\omega_2)}}\\ &=\exp\left\{\frac{\pi i}{6}B_{3,3}(z|\underline{\omega})\right\}\prod_{j,k=0}^{\infty}\frac{(1-e^{2\pi i(-z/\omega_1-j\omega_2/\omega_1-k\omega_3/\omega_1)})(1-e^{2\pi i(-z/\omega_3+(j+1)\omega_1/\omega_3+(k+1)\omega_2/\omega_3)})}{1-e^{2\pi i(-z/\omega_2+(j+1)\omega_1/\omega_2-k\omega_3/\omega_2)}}\end{aligned}$$

$S_r(z|\underline{\omega})$ の性質は、一部の数学者の間では知られていました。黒川信重先生は $S_r(z|\underline{\omega})$ について別の観点から研究結果を残していますし、また、$S_2(z|\omega_1,\omega_2)$ については特に、多くの人の結果が残っています。しかし、パラメータ $\underline{\omega}$ を複素数とし、一般の $S_r(z|\underline{\omega})$ の積分表示および無限積表示について、体系的に結果を論じたものは私の論文くらいではないかと思います。

3.2 Multiple Elliptic Gamma Function $G_r(z|\underline{\tau})$ のモジュラー関係式

ここまでで実はすでに、$\theta_0(z,\tau),\Gamma(z,\tau,\sigma)$ のモジュラー関係式 (23),(24) が見えています。例で示したように、$r\geq 2$ の $S_r(z|\underline{\omega})$ には 2 通りの無限積表示があります。両者の同値性が実は $G_r(z|\underline{\tau})$ のモジュラー関係式になっているのです。具体的には、$S_2(z|\omega_1,\omega_2)$ の式において $\omega_1=\tau,\omega_2=-1$ とおけば (23)、$S_3(z|\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ の式において $\omega_1=\tau,\omega_2=\sigma,\omega_3=-1$ とおけば (24) が得られるのです。

ここで、(23),(24) を一般化した私の結果 [1] を紹介します。その前に $G_r(z|\underline{\tau})$ の定義を $\mathrm{Im}\,\tau_j > 0\ (\forall j)$ に対してだけではなく、一般の $\mathrm{Im}\,\tau_j \neq 0\ (\forall j)$ に対しても、次の式を満たすように広げておきます。

$$G_r(z|\tau_0,\cdots,\tau_r) = G_r(z-\tau_j|\tau_0,\cdots,-\tau_j,\cdots,\tau_r)^{-1}$$

そして、一般的な結果が次のように美しく記述されます。（ $\vee$ は、その項を除くという意味です。）

定理 ($G_r(z|\underline{\tau})$ のモジュラー関係式)　$r \geq 2, \mathrm{Im}\,\frac{\omega_j}{\omega_k} \neq 0$ のとき、

$$\prod_{k=1}^{r} G_{r-2}\left(\frac{z}{\omega_k}\middle|\frac{\omega_1}{\omega_k},\cdots,\frac{\overset{\vee}{\omega_k}}{\omega_k},\cdots,\frac{\omega_r}{\omega_k}\right) = \exp\left\{-\frac{2\pi i}{r!}B_{r,r}(z|\underline{\omega})\right\}$$

系　$\mathrm{Im}\,\tau_j \neq 0, \mathrm{Im}\,\frac{\tau_j}{\tau_k} \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
&G_r(z|\underline{\tau})\\
&= \exp\left\{\frac{2\pi i}{(r+2)!}B_{r+2,r+2}(z|(\underline{\tau},-1))\right\}\prod_{k=0}^{r} G_r\left(\frac{z}{\tau_k}\middle|\frac{\tau_0}{\tau_k},\cdots,\frac{\overset{\vee}{\tau_k}}{\tau_k},\cdots,\frac{\tau_r}{\tau_k},-\frac{1}{\tau_k}\right)\\
&= \exp\left\{-\frac{2\pi i}{(r+2)!}B_{r+2,r+2}(z|(\underline{\tau},1))\right\}\prod_{k=0}^{r} G_r\left(-\frac{z}{\tau_k}\middle|-\frac{\tau_0}{\tau_k},\cdots,-\frac{\overset{\vee}{\tau_k}}{\tau_k},\cdots,-\frac{\tau_r}{\tau_k},-\frac{1}{\tau_k}\right)
\end{aligned}$$

多くの分野においてテータ関数は古くから重要な役割を担い、また、多重サイン関数は整数論のみならず、数理物理でも有用であることが明らかになってきています。独立して面白い性質を持っていると思われていたこれらが、実は対をなすように繋がっていたという事実が私には驚きでした。

最後に、この研究に残された課題を紹介します。テータ関数のモジュラー関係式 (23) はモジュラー群と呼ばれる群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に関係します。群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の作用によってテータ関数の変数 (z,τ) は $\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)$ などに変換されるのですが、この作用の前後の値が (23) により結ばれているからです。さらに、その一つ上、$\Gamma(z,\tau,\sigma)$ の (24) については、群 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ との対応が Felder,Varchenko によって知られています。当然、私が導いた上の結果には群 $\mathrm{SL}(r+2,\mathbb{Z})$、あるいはそれに似た群が対応するのではないかと思われるのですが、私には手に負えない課題でした。今後、どなたかが解決してくださるのを待つつもりです。そして、その「どなたか」が本稿をお読みの方であれば、なお嬉しく思います。

謝意

研究を進めるにあたり、数学専攻の知人の方、そして、それ以外の知人の方にも、多くのお教えや励ましを頂きました。この場を借りて、お礼申し上げます。そして、特にお世話になりました竹村剛一さん、飯島康之さん、吉永正彦さんには深くお礼を申し上げたいと思います。

そして、展覧会と称し 8 ページにも及んだ本稿をご覧頂いた、すべての方にお礼を申し上げたいと思います。ありがとうございました。

参考文献

[1] A.Narukawa, The modular properties and the integral representations of the multiple elliptic gamma functions, Advances in Math. 189 (2) (2004) 247–267, math.QA/0306164