# 生保数理公式集 (令和 2 年用)

これさえ覚えれば他の公式は考えて導けるような、最低限の公式を集めました。
教科書の内容を理解していれば自然に思い出せるような公式は省略しています。

**第 1 章**

$$\left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)^k = 1+i$$
$$i^{(k)} = k(v^{-\frac{1}{k}}-1)$$

$$\left(1-\frac{d^{(k)}}{k}\right)^k = 1-d$$
$$d^{(k)} = k(1-v^{\frac{1}{k}})$$

$$d^{(k)} = i^{(k)}v^{\frac{1}{k}} \qquad (k=1 \text{ の場合も有用})$$

$$\lim_{k\to\infty} d^{(k)} = \lim_{k\to\infty} i^{(k)} = -\log v = \delta$$

ハーディの公式 $\qquad i = \dfrac{2I}{A+B-I}$

$$\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{d^{(k)}} \qquad (k=1, k\to\infty, n\to\infty \text{ の場合も有用})$$
$$a^{(k)}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{i^{(k)}} \qquad (k=1, k\to\infty, n\to\infty \text{ の場合も有用})$$

$$(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n-ndv^n}{d^2} \qquad (\ (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \ddot{a}^2_{\infty} - v^n(\ddot{a}^2_{\infty}+n\ddot{a}_{\infty}) \text{ で理解可能、} n\to\infty \text{ の場合も有用})$$

$$\frac{1}{\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n|}}} - \frac{1}{\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n|}}} = d^{(k)} \qquad (k=1, k\to\infty \text{ の場合も有用})$$
$$\frac{1}{a^{(k)}_{\overline{n|}}} - \frac{1}{s^{(k)}_{\overline{n|}}} = i^{(k)} \qquad (k=1, k\to\infty \text{ の場合も有用})$$

**第 2 章**

$$\mu_x = -\frac{d}{dx}\log l_x = \frac{d}{dx}\log\left(\frac{1}{l_x}\right)$$
$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\log {}_tp_x = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{1}{{}_tp_x}\right)$$

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right)$$
$${}_tq_x = \int_0^t {}_sp_x\ \mu_{x+s}ds$$
$$\int_0^\infty ({}_tp_x)^n\ \mu_{x+t}dt = \frac{1}{n} \qquad \text{(連生でも理解可能)}$$

$$\mu_x = \mu \quad \Leftrightarrow \quad {}_tp_x = e^{-\mu t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathring{e}_x = \frac{1}{\mu}$$
$$\mu_x = \frac{a}{\omega - x} \quad \Leftrightarrow \quad {}_tp_x = \left(\frac{\omega - x - t}{\omega - x}\right)^a \quad \Leftrightarrow \quad \mathring{e}_x = \frac{\omega - x}{a+1}$$

$$e_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tp_x = p_x(e_{x+1}+1)$$
$$\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x dt \approx e_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\mu_x$$

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l_{x+t}dt$$
$$\mathring{e}_x = \frac{T_x}{l_x} = {}_n\mathring{e}_x + {}_{n|}\mathring{e}_x$$
$${}_n\mathring{e}_x = \frac{T_x - T_{x+n}}{l_x}$$
$${}_{n|}\mathring{e}_x = \frac{T_{x+n}}{l_x} = {}_np_x\ \mathring{e}_{x+n}$$

$$\frac{d}{dt}{}_tp_x = -{}_tp_x\ \mu_{x+t}$$
$$\frac{d}{dx}{}_tp_x = {}_tp_x\ (\mu_x - \mu_{x+t})$$
$$\frac{d}{dx}\mathring{e}_x = \mu_x\ \mathring{e}_x - 1$$

$$\text{定常状態で } x \text{ 歳から } x+n \text{ 歳までで死ぬ者の平均年齢} = x + \frac{T_x - T_{x+n} - n\ l_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}$$

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}dt = T_x - T_{x+1} \approx l_x - \frac{1}{2}d_x$$

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} \approx \frac{q_x}{1 - \frac{q_x}{2}}$$
$${}_nm_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{T_x - T_{x+n}} \approx \frac{{}_nq_x}{n(1 - \frac{{}_nq_x}{2})} \qquad (n = 1 \text{ で上の式})$$

**第 3 章**

※以下は $C$ の部分、$\mu^C_{x+s}$、$q^{C*}_x$、$q^C_x$ が 0 の場合も有用

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \exp\left(-\int_0^t \mu^A_{x+s} + \mu^B_{x+s} + \mu^C_{x+s} ds\right) \\ {}_tq^A_x &= \int_0^t {}_sp_x \; \mu^A_{x+s} ds \end{aligned}$$

$$q^A_x = q^{A*}_x \left\{1 - \frac{1}{2}(q^{B*}_x + q^{C*}_x) + \frac{1}{3} q^{B*}_x q^{C*}_x\right\}$$

$$q^{A*}_x \approx \frac{q^A_x}{1 - \frac{1}{2}q^{B*}_x - \frac{1}{2}q^{C*}_x} \approx \frac{2m^A_x}{2 + m^A_x}$$

$$p^*_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = p^{A*}_x p^{B*}_x p^{C*}_x = (1 - q^{A*}_x)(1 - q^{B*}_x)(1 - q^{C*}_x)$$

$$m^A_x = \frac{a_x}{L_x} \approx \frac{q^A_x}{1 - \frac{1}{2}q^A_x - \frac{1}{2}q^B_x - \frac{1}{2}q^C_x}$$

**第 4 章**

$$\begin{array}{ccccc} C_x & \xrightarrow{\Sigma} & M_x & \xrightarrow{\Sigma} & R_x \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ D_x & \xrightarrow{\Sigma} & N_x & \xrightarrow{\Sigma} & S_x \end{array}$$

$$\begin{aligned} C_x &= vD_x - D_{x+1} \\ M_x &= vN_x - N_{x+1} \qquad \text{(上の式の両辺を } \Sigma \text{ で足せば導出可能)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dN_x &= D_x - M_x \\ dS_x &= N_x - R_x \qquad \text{(上の式の両辺を } \Sigma \text{ で足せば導出可能)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(k)} &\approx \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} - \frac{k^2-1}{12k^2}(\delta + \mu_x) \qquad (k \to \infty \text{ の場合も有用)} \\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(k)} &\approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{k-1}{2k}(1 - v^n {}_np_x) \qquad \text{(上の式からも導出可能)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^1_{x:\overline{n}|} &= v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} \qquad (n \to \infty \text{ の場合も有用)} \\ A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} &= 1 + a_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \qquad (n \to \infty \text{ の場合も有用)} \\ A_{x:\overline{n}|} &= 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \qquad (n \to \infty \text{ の場合も有用、} d \text{ を } \delta \text{ にした連続型の場合も有用)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \mu_x\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} \\ \frac{d}{dx}\bar{a}_x &= (\mu_x + \delta)\,\bar{a}_x - 1 \qquad \text{(上の式で } n \to \infty \text{ とすれば導出可能)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x\ \ddot{a}_{\overline{t}|} + {}_np_x\ \ddot{a}_{\overline{n}|} \\ s_{\overline{n}|} - s_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x\ s_{\overline{n-t}|} \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{n-1} v^t\ {}_{t-1|}q_x\ \ddot{a}_{\overline{n-t}|} \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} \ddot{a}_{\overline{n-t}|} = v^{n-t-1}s_{\overline{n-t}|}\ ,\ \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v^{n-1}s_{\overline{n-1}|}\ ,\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v^{n-1}s_{x:\overline{n-1}|}\ , \\ n \mapsto n+1,\ t \mapsto t+1 \text{ とすると上の式と一致} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x} \\ (IA)^1_{x:\overline{n}|} &= \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x} \qquad \text{(満期保険金なし)} \\ (IA)_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - d\,(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} \qquad \text{(満期保険金あり、} A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \text{ と類似)} \end{aligned}$$

**第 5 章**

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x:\overline{n}|} &= 1-\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (n\to\infty \text{ の場合も有用}) \\
{}_tV^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} &= 1-\frac{\overline{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\overline{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (n\to\infty \text{ の場合も有用})
\end{aligned}
$$

保険金額変動、事業費ありの場合

$_{t-1}V+{}_tP-E_{t-1}-v\ q_{x+t-1}\ S_t=v\ p_{x+t-1}\ {}_tV$ (即時払なら $v\ q_{x+t-1}$ を $v^{\frac{1}{2}}\ q_{x+t-1}$ に)

$_tP=\{v\ q_{x+t-1}(S_t-{}_tV)+E_{t-1}\}+\{v\ {}_tV-{}_{t-1}V\}$

$$
\begin{aligned}
&{}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|}-v\ q_{x+t-1}=v\ p_{x+t-1}\ {}_tV_{x:\overline{n}|} \\
&P_{x:\overline{n}|}=v\ q_{x+t-1}(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})+(v\ {}_tV_{x:\overline{n}|}-{}_{t-1}V_{x:\overline{n}|})
\end{aligned}
$$

$${}_{n-1}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|}=v \qquad (\text{一時払なら } P_{x:\overline{n}|} \text{ を } 0 \text{ に})$$

Thiele の微分方程式 (上巻 P.202) $\quad \dfrac{d}{dt}{}_tV^{(\infty)}=(\mu_{x+t}+\delta)\ {}_tV^{(\infty)}+P^{(\infty)}_t-E_t-\mu_{x+t}\ S_t$

**第 7 章**

新契約費 $\alpha$、集金経費 $\beta$、維持費（払込中、払込後）$\gamma,\gamma'$ を考える。$\gamma''=\gamma-\gamma'$ とおく。
$\alpha,\gamma,\gamma'$ が $S$ 比例、$\beta$ が $P$ 比例なら、

$$A^*=A+\alpha+\gamma'\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$
\begin{aligned}
(1-\beta)\ {}_mP^*\ \ddot{a}_{x:\overline{m}|} &= A+\alpha+\gamma'\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+\gamma''\ddot{a}_{x:\overline{m}|} \\
&= A^*+\gamma''\ddot{a}_{x:\overline{m}|}
\end{aligned}
$$

$\alpha,\gamma,\gamma'$ が $F$ 比例なら、$F=(1+\eta)\ddot{a}$ として、

$$(1-\beta)\ {}_mP^*\ \ddot{a}_{x:\overline{m}|}=F(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}+\alpha+\gamma'\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+\gamma''\ddot{a}_{x:\overline{m}|})$$

**第 8 章**

※以下は終身保険（$n\to\infty$）の場合やその他の保険の場合も有用、また、即時払の場合も有用

$h\le m\le n$ の場合、

$$
\begin{aligned}
P_2 &= {}_mP_{x:\overline{n}|}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \\
P_1 &= P_2-\alpha={}_mP_{x:\overline{n}|}-\alpha\left(1-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right) \qquad (\ {}_0V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}=0 \text{ と定義})
\end{aligned}
$$

$${}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|}={}_tV_{x:\overline{n}|}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} \qquad (\ {}_0V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}=-\alpha \text{ と定義すれば } t=0 \text{ も可})$$

$$\left({}_{t-1}V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}-{}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}\right)+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}=v\ p_{x+t-1}\left({}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|}-{}_tV_{x:\overline{n}|}\right) \qquad (\ {}_0V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}=-\alpha \text{ と定義すれば } t=1 \text{ も可})$$

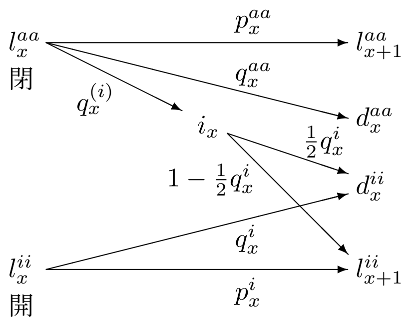
さらに、$t=1$ で ${}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|}=0$ なら、

$$P_1=vq_x$$

さらに、$m=h$ なら、

$$
\begin{aligned}
P_2 &= {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} \\
{}^m_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|} &= {}^{m-1}_{t-1}V_{x+1:\overline{n-1}|}
\end{aligned}
$$

**第 13 章**




$$
\begin{aligned}
l_x &= l_x^{aa} + l_x^{ii} \\
d_x &= d_x^{aa} + d_x^{ii}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_x^{aa*} &= \frac{q_x^{aa}}{1-\frac{1}{2}q_x^{(i)}} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}-\frac{1}{2}i_x} \\
q_x^{(i)*} &= \frac{q_x^{(i)}}{1-\frac{1}{2}q_x^{aa}} = \frac{i_x}{l_x^{aa}-\frac{1}{2}d_x^{aa}}
\end{aligned}
$$

$$
q_x^{ii} = \frac{d_x^{ii}}{l_x^{ii}} \quad \text{(形式的)}
$$

$$
\begin{aligned}
q_x^i &= \frac{d_x^{ii}}{l_x^{ii}+\frac{1}{2}i_x} \\
q_x^a &= q_x^{aa} + \frac{1}{2}q_x^{(i)}q_x^i = \frac{d_x^{aa}+\frac{1}{2}i_x q_x^i}{l_x^{aa}} \\
p_x^{ai} &= q_x^{(i)}\left(1-\frac{1}{2}q_x^i\right) = \frac{l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}p_x^i}{l_x^{aa}} \\
q_x^{ai} &= \frac{1}{2}q_x^{(i)}q_x^i = \frac{d_x^{ii}-l_x^{ii}q_x^i}{l_x^{aa}}
\end{aligned}
$$

$$
q_x^{(i)} = \frac{\frac{l_{x+1}^{ii}}{l_{x+1}}(1-q_x) - \frac{l_x^{ii}}{l_x}(1-q_x^i)}{\left(1-\frac{l_x^{ii}}{l_x}\right)\left(1-\frac{1}{2}q_x^i\right)} \qquad \left( i_x = \frac{l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}p_x^i}{1-\frac{1}{2}q_x^i} \text{ より} \right)
$$

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{ai} &= \frac{l_{x+t}^{ii}-l_x^{ii}\,{}_tp_x^i}{l_x^{aa}} \\
{}_tp_x^{a} &= \frac{l_{x+t}-l_x^{ii}\,{}_tp_x^i}{l_x^{aa}}
\end{aligned}
$$