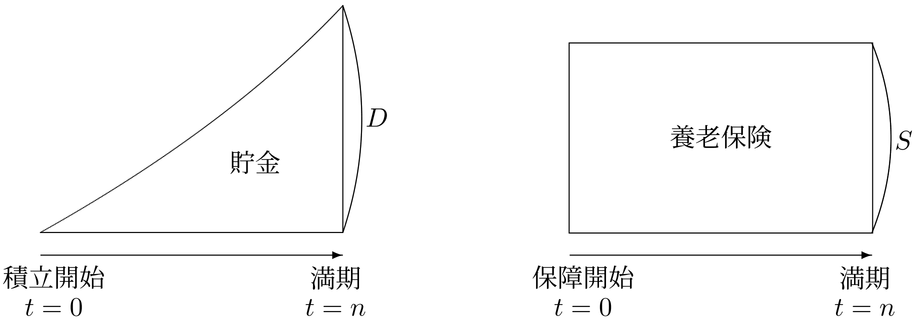
貯金は三角・保険は四角

～貯金と保険の数理的な違い～

生命保険会社に入社した私の近況報告を兼ねて、生命保険の保険料の計算方法について紹介します。大勢の契約者に対して保険会社の収支を保つために保険料をいくらに設定すればよいか、という視点で議論を重ねることも可能ですが、ここでは、契約１件単位で確率論的に保険料を設定する方法を紹介します。また同時に、養老保険という保険の契約内容を通して、貯金と保険の違いは何かを数理的に観察してみたいと思います。

貯金は三角・保険は四角



保険について学び始めた頃、「貯金は三角・保険は四角」という言葉を聞いたことがあります。いま、保険と言った場合には、次のような**養老保険**の契約を考えることにします。

(s1) A さんが n 年以内に死亡したとき、保険会社は A さんの遺族に**死亡保険金** S 円を支払う。

(s2) A さんが n 年後に生存しているとき、保険会社は A さんに**満期保険金** S 円を支払う。

(p) A さんは生存している限り n 年後まで、毎年、保険会社に**保険料** P 円を支払う。

(p) の保険料は通常は月払で払われることが多いのですが、簡単のため、年払を仮定しました。また、期始払い、つまり、経過年数 $t = 0, 1, \cdots, n-1$ のところで払い込みが行われるとします。一方、貯金については銀行預金を想定し[1]、年払かつ期始払いで n 年間かけて P 円を積み立てていき、n 年後には利息も含めて貯金の総額が D 円になっているとします。このとき、A さんが途中で死亡してしまった場合に遺族が受け取れる額を縦軸、時間の経過を横軸にとると、それぞれの結果が上の図のように三角と四角になるのです。利息の影響を除けば貯金は確かに三角ですし、一方、養老保険が四角（長方形）であることは、契約内容の (s1) でご理解いただけると思います。

それでは、P,D,S はそれぞれどのような関係を持っているのでしょうか？

貯金に関する等式 $D = P\ddot{s}_{\overline{n|}}$ （利率が一定の場合）

銀行や保険会社は受け取ったお金を運用して、利息収入を得ます。その利息を預金者や保険契約者に還元するわけですが、その基準となる利率を i とおき、以下、利率 i は n 年間一定であると仮定し

[1]定期預金ではなく、自由に解約できる普通の預金で考えます。

ます。すると、$t=0$ で貯金として払い込まれた P は $t=n$ では $P(1+i)^n$、$t=1$ で払い込まれた P は $t=n$ では $P(1+i)^{n-1}$、$\cdots$、$t=n-1$ で払い込まれた P は $t=n$ では $P(1+i)$ という額になりますので、n 年後の貯金の総額 D は、

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{t=0}^{n-1} P(1+i)^{n-t} \\
&= P\ddot{s}_{\overline{n|}}
\end{aligned}
$$

と表せます。ここで、$\ddot{s}_{\overline{n|}}$ は生命保険数学で**期始払確定年金終価**と呼ばれるもので、

$$
\ddot{s}_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^{n-t} = \frac{(1+i)((1+i)^n-1)}{i}
$$

のことです。終価というのは、$t=n$ での価値という意味です。

現価による考え方

一方で、生命保険の保険料は $t=n$ での終価ではなく、$t=0$ での現価という概念を使って計算するのが普通です。今、手元に 1 という額があるとすると、それは 1 年運用後の価値としては $1+i$ です。逆に、1 年運用後に手元に 1 という額があるとすると、それは運用前の現在の価値、現価としては $\frac{1}{1+i}$ である、と考えます。ここで、

$$
v = \frac{1}{1+i}
$$

とおき、これを**現価率**と呼びます。今 v があるからそれを運用して、1 年後には $v(1+i)=1$ になっているのだというわけです。以下、$i>0$ を仮定し、$v<1$ となります。

ここで、先ほどの貯金の例を現価を用いて書いてみましょう。まず、n 年後の D は、現価としては Dv^n です。また、$t=0$ で払われる P の現価は P、$t=1$ で払われる P の現価は Pv、$\cdots$、$t=n-1$ で払われる P の現価は Pv^{n-1} です。したがって、利率が一定の場合、現価に関する等式

$$
\begin{aligned}
Dv^n &= \sum_{t=0}^{n-1} Pv^t \\
&= P\ddot{a}_{\overline{n|}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。ここで、$\ddot{a}_{\overline{n|}}$ は生命保険数学で**期始払確定年金現価**と呼ばれるもので、

$$
\ddot{a}_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t = \frac{1-v^n}{1-v}
$$

のことです[2]。(1) を P に関する式に直すと、

$$
P = \frac{v^n}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} D \qquad (2)
$$

となっています。定義より、$\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^n \ddot{s}_{\overline{n|}}$ であることもご確認ください。

[2] 債券投資の際に登場する計算と似ており、Microsoft Excel における PV(Present Value) 関数、FV(Forward Value) 関数を使うと、

$$
\ddot{a}_{\overline{n|}} = -\mathrm{PV}(i,n,1,0,1) \quad , \quad \ddot{s}_{\overline{n|}} = -\mathrm{FV}(i,n,1,0,1)
$$

と書けます。また、ローンの分割返済の計算に用いる PMT という関数を使って書くこともできます。

養老保険に関する等式 $S\ \overline{A}_{x:\overline{n|}} = P\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ （純保険料のみの場合）

保険料は、(1) に対応する等式を、死亡率を用いて確率論的に導いて得られます。そのためにまず、死亡率などに関する定義を導入しましょう。以下、x,t は整数で考えます。

死亡率 ${}_tq_x$ ちょうど x 才の人が t 年以内に死亡する確率。${}_0q_x = 0$ が成り立つ。$t = 1$ の場合、${}_1q_x = q_x$ と書く。

生存率 ${}_tp_x$ ちょうど x 才の人が t 年後に生存している確率。${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$，${}_{s+t}p_x = {}_sp_{x+t} \cdot {}_tp_x$，${}_0p_x = 1$ が成り立つ。$t = 1$ の場合、${}_1p_x = p_x$ と書き、$p_x = 1 - q_x$ が成り立つ。

据置死亡率 ${}_{t|}q_x$ ちょうど x 才の人が t 年生存後、1 年以内に死亡する確率。
${}_{t|}q_x = {}_tp_x \cdot q_{x+t} = {}_tp_x - {}_{t+1}p_x = {}_{t+1}q_x - {}_tq_x$ が成り立つ。$t = 0$ の場合、${}_{0|}q_x = q_x$ が成り立つ。

契約者各人の潜在的な死亡率はわかりませんが、年齢と性別によって統計的に決まっているとします。今、A さんの年齢を x 才とします。そして、

> 保険会社の収入現価と支出現価が等しくなるように保険料を決める …☆

という**収支相等の原則**を使います。実際には会社運営に必要な経費等も含めた**営業保険料**について収支相等の原則を使うのですが、議論が細かくなってしまうので、今回はそこまでは考えません。今回は、死亡率と利率のみで考える保険料、つまり**純保険料**について考えます。

それではまず、契約内容 (s1,s2) による保険会社の支出現価を求めましょう。結論としては、支出現価は $S = 1$ の場合は、

$$\overline{A}_{x:\overline{n|}} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}}\ {}_{t|}q_x \right) + v^n\ {}_np_x$$

で、一般の S の場合は、

$$S\ \overline{A}_{x:\overline{n|}}$$

です。$S = 1$ の場合、経過 t 年から $t+1$ 年の間に契約者が死亡してしまう確率は ${}_{t|}q_x$ であり、その人は近似的に経過 $t + \frac{1}{2}$ 年のところで死亡すると思うと、(s1) による保険金 1 の現価が $v^{t+\frac{1}{2}}$ です[3]。この現価の期待値を $t = 0$ から $n - 1$ まで考えて足し合わせます。また、(s2) の現価の期待値は生存率を用いて $v^n\ {}_np_x$ と書けますので、これを加えたものが $\overline{A}_{x:\overline{n|}}$ です。$S = 1$ でない場合がその S 倍であることは自然でしょう[4]。$\overline{A}_{x:\overline{n|}}$ は養老保険の一時払純保険料と呼ばれ、契約内容 (p) を

(p') A さんは契約時に 1 回のみ、保険会社に保険料 P' 円を支払う。

とし、$S = 1$ とした場合の純保険料です。

---

[3]積分を使った近似もできます。t 年から $t+1$ 年の間で死亡が一様に発生するならば、この期間の保険金 1 の現価は

$$\int_t^{t+1} v^s ds = \frac{v^{t+1} - v^t}{\log v} = v^t \frac{e^{\log v} - 1}{\log v} = v^t \left(1 + \frac{1}{2}\log v + \frac{1}{6}(\log v)^2 + \cdots \right)$$

です。一方で、

$$v^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log v} = 1 + \frac{1}{2}\log v + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\log v\right)^2 + \cdots$$

であり、$i \approx 0, \log v \approx 0$ なので、保険金の現価は $v^{t+\frac{1}{2}}$ で近似されます。

[4]健康に自信のない人や自殺を考えている人ほど保険金額の大きな契約に加入しやすい傾向があるため、保険金額が大きくなると死亡率が悪化し、必要な純保険料と保険金額が比例しない可能性も考えられます。

次に、契約内容 (p) による収入現価を求めましょう。結論としては、収入現価は $P=1$ の場合は、

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,{}_tp_x$$

で、一般の P の場合は、

$$P\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

です。$P=1$ の場合、経過 t 年後に保険料 1 が払い込まれる確率は、契約者が t 年後に生存している確率 ${}_tp_x$ です。また、その際の保険料 1 の現価が v^t です。この現価の期待値を $t=0$ から $n-1$ まで考えて足し合わせたものが $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ です。$P=1$ でない場合がその P 倍であることは自然でしょう。$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ は**期始払有期年金現価**と呼ばれています。

以上の収入現価と支出現価について、収支相等の原則を用いれば、

$$S\ \overline{A}_{x:\overline{n|}} = P\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{3}$$

であり、これを P に関する式に直すと、

$$P = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} S \tag{4}$$

となっています[5]。

保険料の計算は契約時の利率と死亡率に基づき、契約締結後、更新などがない限り保険料は変わりません。契約時に固定された利率と死亡率を特に、**予定利率**、**予定死亡率**と言います。

貯金と養老保険の比較

予定死亡率 q_x がすべて 0 の場合、$\overline{A}_{x:\overline{n|}} = v^n$, $\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}}$ なので、(2) と (4) の対応も明らかかと思います。そして気になるのは、P と i が同じ場合の D と S の大小関係です。直感的には、養老保険の方が死亡保障が付いていて、早めに S を受け取れる可能性があるので、$S<D$ でなければ釣り合わないのではないかと思えます。証明は補足に譲りますが、共通の i を用いると確かに、

$$\frac{\overline{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} > \frac{v^n}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} \tag{5}$$

が成り立ちますので、P が同じであれば $S<D$ であり、養老保険の方が満期時の受け取りが少ないこととなります。

しかしながら、銀行の積立利率と、保険会社の予定利率では、保険会社の方が高いことが多いです。保険の方は、予定利率が n 年間固定されると同時に、長期の契約を前提としているため、有利な運用を行うことができ、貯金の利率よりは高めの利率を設定できるようです。また、式 (1) や (2) では利率を一定にしましたが、実際の銀行預金では利率が変動するため、ここにも違いがあります。

一方で、以上で述べた保険料には会社経費等が含まれていません。実際の保険契約では、新契約費・維持費等の費用を保険料に織り交ぜて、n 年間に渡って回収していく仕組みになっています。以上より、利率では貯金よりも保険の方が勝り、死亡保障費用と会社経費の面では保険よりも貯金の方が勝っています。結果として、お金を貯めるという意味では概ね、養老保険より貯金の方が有利であ

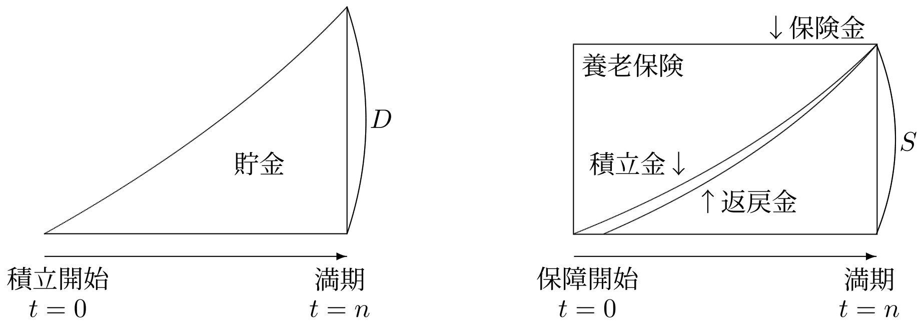
[5]収支相等の式 (3) を見て、「この式は契約が途中で解約される可能性を考えていない」と思う方がいれば、勘が鋭いです。しかし、解約する契約者には、別途計算された解約返戻(へんれい)金を保険会社が払いますので、解約を考えないこのままの式で、収支相等の原則を考えて問題ありません。逆に、解約した人に解約返戻金を払わない前提であれば、解約率を見込んで収支相等の式を考える必要があります。その方が見た目の保険料が安くなるため、その方法で保険料を設定する会社も増えています。

ることが多いと思います。もちろん、養老保険は死亡保障が目的ですので、比較すること自体がおかしいとも言えますが、保険の貯蓄機能を考える際には以上の議論が参考になると思います[6]。

なお、養老保険が貯金よりも有利になりやすいのは、払い込み期間が短い場合です。例えば、契約内容 (s1,s2) の n 年はそのままで、(p) の n 年の部分を、n 年よりも短くすることも可能です。また、(p') のような一時払も可能です。そうすると、同じ S でも P の総額が安くなりうるのですが、これには主に 3 つの理由があります。

- 払い込みを前倒しすることで、その分の利息を加味して P が安く設定される。
- 払い込み期間中に契約者が死亡すると、それ以後の保険料の払い込みがなくなるが、払い込みを前倒しする場合には、その可能性が少なくなり、その分だけ P は安く設定される。
- 毎回の保険料には定額の維持費等が含まれており、支払回数が少ないほど、この負担額の合計が少なくなる。

最後に、貯金や保険契約を途中で解約するといくら返ってくるのかを考えましょう。



貯金については、もともと死亡による貯金の引き出しを考えていたので、最初と同じ三角です。

一方で、養老保険を解約された場合には、その契約に固有の積立金から、解約控除と呼ばれる額を引き去った額が解約返戻金として契約者に払われます。積立金というのは、将来の満期、死亡時の S 支払に備えて保険会社が積み立てている額です。あるいは、毎年受け取った保険料から、死亡保障経費と会社経費を引き去って、利息を足していった額だとも思え、これも図のように三角になります。一方で、解約控除というのは、通常の貯金にはないものです。保険の場合、すでに述べたように、新契約費を n 年間に渡って回収するつもりで営業保険料を設定しています。ところが、途中で契約者に解約されてしまうとその回収がうまくいきません。それを別の形で回収する手段として、積立金から引き去るのが解約控除です。また、保険会社としては長期的な運用をできるつもりが、それが果たされず損失を被ることを避ける意味でも、解約控除というものが設定されています。

	貯金	養老保険
死亡保障	なし	あり
利率	低めで変動	高めで固定
会社経費等	なし	あり
解約控除	なし	あり

四角でない保険たち

今まで、契約内容として (s1) と (s2) を並行して考えてきましたが、(s2) を取り去った契約として、**定期保険**というものも有名です。養老保険と定期保険は、満期保険金の有無という点で大きく異なりますが、図にするとどちらも四角（長方形）となります。

[6]逆に生存保障重視の商品については、長生きした契約者にとっては保険が貯金よりも有利になることもあります。

さて、以上では保険は四角だという話を進めてきたのですが、古典的な養老保険や定期保険についてはそうだというだけで、すべての保険が四角というわけではありません。そもそも、すべての保険について形を考えることができるわけでもありません。そこで、形を描ける保険のうち、四角にはならないものを紹介してみたいと思います。いま、契約内容 (s2) を取り去り、(s1) の代わりに、

(s1') A さんが経過 $t-1$ 年から t 年の間に死亡したとき、保険会社は遺族に保険金 S_t 円を支払う。

を考えましょう。$S = S_1 = \cdots = S_n$ としたものが定期保険です。しかし、$S_1 > \cdots > S_n$ としたものも販売されており、これは逓減定期保険と呼ばれています。$S_1 < \cdots < S_n$ としたものも販売されており、これは逓増定期保険と呼ばれています。逓減定期と逓増定期は、図にすると台形のような形になります。これらも、契約者の保障ニーズに併せて開発されてきた興味深い保険です。

最後に

貯金との比較によって、生命保険にまつわる数理を浮き彫りにすることを目指したのですが、いかがでしたでしょうか。簡単に話を進めたのですが、保険会社の将来に渡っての健全性や収益性、魅力的な商品設計などを考えていくと、この分野は非常に奥が深いです。また、保険業界は今、激動の時代を迎えつつあります。その中で、基本をおさえつつも、新しい考え方を導入していけるよう、私はもっと勉強を重ねたいなと考えています。

補足　(5) の証明

分子分母をそれぞれ比較する。まず分母を比較すると、

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_x < \sum_{t=0}^{n-1} v^t = \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

である。次に、

$$\begin{aligned}
(1-v)\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= (1-v)\sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_x \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_x - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_tp_x \\
&= \left(1 - v^n {}_np_x + \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tp_x\right) - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_tp_x \\
&= 1 - v^n {}_np_x + \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_{t+1}p_x - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_tp_x \\
&= 1 - v^n {}_np_x - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_{t|}q_x
\end{aligned}$$

であり、また、$v < 1$ と $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} < \ddot{a}_{\overline{n}|}$ より、分子については、

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \left(\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} {}_{t|}q_x\right) + v^n {}_np_x > \left(\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_{t|}q_x\right) + v^n {}_np_x = 1-(1-v)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} > 1-(1-v)\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n$$

が言えて、(5) が示された。

成川淳 (なるかわあつし)