群と群から群を作る話

成川淳（なるかわあつし）

数学の世界ではしばしば、2 つの群から 1 つの群を作る場面があります。方法としては、「直積」という概念が最も自然で、最も頻繁に見かけるのですが、少し複雑な「半直積」という概念も頻繁に見かけます。しかし、半直積の定義は 2 つの群それぞれの役割が非対称で、気持ち悪いなという印象が私にはありました。その気持ち悪さを解消し、直積・半直積を包括する概念として、群の Bicrossed Product というものがあります。この概念を知って感心した覚えがあるので、ここで紹介することにしました。本稿では群の定義と直積の定義は省略して、作用という概念の紹介から話を進めます。

1　群の作用

群 G と集合 X に対して、写像

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & {}^{g}x \end{array}$$

が次の性質を満たすとき、G は X に左作用しているといいます。

$$\begin{aligned} {}^{(g_1 g_2)}x &= {}^{g_1}({}^{g_2}x) \qquad (\forall g_1, g_2 \in G,\ \forall x \in X) && (1) \\ {}^{1}x &= x \qquad (1 \in G,\ \forall x \in X) && (2) \end{aligned}$$

一方で、右作用というものもあります。群 G と集合 X に対して、写像

$$\begin{array}{rcl} X \times G & \longrightarrow & X \\ (x, g) & \longmapsto & x^{g} \end{array}$$

が次の性質を満たすとき、G は X に右作用しているといいます。

$$\begin{aligned} x^{(g_1 g_2)} &= (x^{g_1})^{g_2} \qquad (\forall x \in X,\ \forall g_1, g_2 \in G) && (3) \\ x^{1} &= x \qquad (\forall x \in X,\ 1 \in G) && (4) \end{aligned}$$

左作用と右作用を並べて見た場合に、「左作用と右作用は記法が違うだけ」と思われる方がいるかもしれません。しかし、もし仮に右作用を x^g ではなく ${}^{g}x$ と書いてしまうと、前提 (3) が ${}^{(g_1 g_2)}x = {}^{g_2}({}^{g_1}x)$ という不自然な形に書かれてしまうことになります。これは、左作用と右作用が構造的に異なることを表しています。左作用だけ考える場合には、左作用を単に作用と呼びますが、本稿では左作用と右作用を区別して考えるので、単なる作用という言葉は使いません。なお、表現という言葉を使った定義について、名著 [2] をお薦めします。

2　群の半直積

次に、半直積の定義を紹介します。半直積は、「完全列」や「郡拡大」といった言葉を交えて構成されることが多いのですが、ここでは、二項演算だけを用いて半直積を定義します。

いま、群 K が群 H に左作用しており、次の性質が満たされているとします。

$$
{}^{k}(h_1h_2) = \left({}^{k}h_1\right)\left({}^{k}h_2\right) \qquad (\forall k \in K,\ \forall h_1, h_2 \in H) \tag{5}
$$

この性質は、k による左作用が群 H 上の準同型写像であることに他なりません。この性質から、$\forall k \in K,\ 1 \in H$ に対して ${}^{k}1 = 1$ も自然に導かれます。さて、このとき、集合 $H \times K$ の上での演算を次のように定義すると、$H \times K$ は集合としてだけでなく、群としての構造を持ちます。

$$
(h_1, k_1)(h_2, k_2) := \left(h_1 \left({}^{k_1}h_2\right), k_1k_2\right) \tag{6}
$$

この群を H と K の半直積と呼び、$H \rtimes K$ と書きます。K の H への左作用が自明である、つまり、$\forall k \in K,\ \forall h \in H$ に対して ${}^{k}h = h$ であるときが直積です。

半直積はご覧の通り、H と K について定義が非対称なのが気になります。しかし、ある条件を仮定すれば、H と K について対称な群も定義することができます。それが Bicrossed Product です。その前に、直積と半直積に共通する性質を調べてみましょう。

3　直積と半直積の共通点

いま、直積 $H \times K$ あるいは半直積 $H \rtimes K$ を G とおくと、次の性質が共通します。

① G は群をなすが、集合としては $H \times K$ と同じものである。

② $h \in H$ は $(h, 1)$ という形で、$k \in K$ は $(1, k)$ という形で G に埋め込まれ、さらに、$(h, k) = (h, 1)(1, k)$ が成り立つ。

逆にこれらを仮定すると、$(h, 1)(1, k)$ ではなく $(1, k)(h, 1)$ については、$\exists\alpha(k, h) \in H$ と $\exists\beta(k, h) \in K$ の組が唯一つ存在して、次のように書けるはずです。

$$
(1, k)(h, 1) = (\alpha(k, h), \beta(k, h)) \in H \times K
$$

ここで、α, β は $\alpha : K \times H \to H,\ \beta : K \times H \to K$ という写像として考えられることに注意してください。そしてさらに、この α, β を用いると群 G における積は一般に次のように計算することができます。

$$
\begin{aligned}
(h_1, k_1)(h_2, k_2) &= (h_1, 1)(1, k_1)(h_2, 1)(1, k_2) \\
&= (h_1, 1)(\alpha(k_1, h_2), \beta(k_1, h_2))(1, k_2) \\
&= (h_1, 1)(\alpha(k_1, h_2), 1)(1, \beta(k_1, h_2))(1, k_2) \\
&= (h_1\alpha(k_1, h_2), 1)(1, \beta(k_1, h_2)k_2) \\
&= (h_1\alpha(k_1, h_2), \beta(k_1, h_2)k_2)
\end{aligned}
$$

ここから、α, β が満たすべき条件を引き出すことができます。上の計算規則によると、

$$\begin{aligned}((1,k_1)(1,k_2))(h,1) &= (1,k_1k_2)(h,1)\\ &= (\alpha(k_1k_2,h),\beta(k_1k_2,h))\\ (1,k_1)((1,k_2)(h,1)) &= (1,k_1)(\alpha(k_2,h),\beta(k_2,h))\\ &= (\alpha(k_1,\alpha(k_2,h)),\beta(k_1,\alpha(k_2,h))\beta(k_2,h))\end{aligned}$$

ですが、群 G の結合律により両者は等しいはずですので、次が得られます。

$$\alpha(k_1k_2,h) = \alpha(k_1,\alpha(k_2,h)) \tag{7}$$

$$\beta(k_1k_2,h) = \beta(k_1,\alpha(k_2,h))\beta(k_2,h) \tag{8}$$

さらに、$H(\subset G)$ における自明な式 $(1,1)(h,1)=(h,1)$ からは次が得られます。

$$\alpha(1,h) = h \tag{9}$$

$$\beta(1,h) = 1 \tag{10}$$

ここで気付くのが、条件 (7) と (9) は、左作用の性質 (1) と (2) に他ならないということです。つまり、α によって、群 K が群 H に左作用しているということがわかったのです。そして同様に $(1,k)(h_1,1)(h_2,1)$ の 2 通りの計算と、$(1,k)(1,1)=(1,k)$ により、β は群 H から群 K への右作用であることも確認できます。したがって、以下、$\alpha(k,h)={}^kh,\ \beta(k,h)=k^h$ と書くことにすると、残った条件 (8) と (10) は以下のように書き直されます。

$$(k_1k_2)^h = \left(k_1{}^{\left({}^{k_2}h\right)}\right)\left(k_2{}^h\right) \tag{11}$$

$$1^h = 1 \tag{12}$$

当然、これと対称的に次の性質も確認できます。

$${}^k(h_1h_2) = \left({}^kh_1\right)\left({}^{\left(k^{h_1}\right)}h_2\right) \tag{13}$$

$${}^k1 = 1 \tag{14}$$

以上では、直積と反直積に共通する 2 つの性質①②から、関係する 2 項演算が満たすべき条件を導きました。しかし逆に、これらの条件を満たす 2 項演算を用いると、Bicrossed Product という、直積と反直積を包括する概念を構成することができるのです。

4　Bicrossed Product の構成

いま、群 K が群 H に左作用し、群 H が群 K に右作用しているとします。そして、それぞれの作用について、(11)-(14) の性質が満たされているとします。群が群に左作用する場合、(5) を仮定するのが自然ですが、ここでは (5) は仮定していない点に注意してください。このとき、集合 $H\times K$ の上での演算を次のように定義すると、$H\times K$ は群をなします。

$$(h_1,k_1)(h_2,k_2) := \left(h_1\left({}^{k_1}h_2\right),\left(k_1{}^{h_2}\right)k_2\right) \tag{15}$$

この群を H と K の Bicrossed Product と呼び、$H \bowtie K$ と書きます。

以下、$H \bowtie K$ が群をなすことを簡単に示します。$(1,1)$ が単位元になることは明らかなので省略します。次に、結合律を示すために、次の計算をします。定義と (13) より、

$$\begin{aligned}((h_1,k_1)(h_2,k_2))(h_3,k_3) &= \left(h_1\left({}^{k_1}h_2\right),\left({k_1}^{h_2}\right)k_2\right)(h_3,k_3)\\ &= \left(h_1\left({}^{k_1}h_2\right)\left({}^{\left({k_1}^{h_2}\right)k_2}h_3\right),\left(\left(\left({k_1}^{h_2}\right)k_2\right)^{h_3}\right)k_3\right)\\ &= \left(h_1\left({}^{k_1}\left(h_2\left({}^{k_2}h_3\right)\right)\right),\left(\left(\left({k_1}^{h_2}\right)k_2\right)^{h_3}\right)k_3\right)\end{aligned}$$

であり、同様に、

$$(h_1,k_1)((h_2,k_2)(h_3,k_3)) = \left(h_1\left({}^{k_1}\left(h_2\left({}^{k_2}h_3\right)\right)\right),\left(\left(\left({k_1}^{h_2}\right)k_2\right)^{h_3}\right)k_3\right)$$

であり、結合律が示されます。また、(h,k) の逆元が $\left({}^{(k^{-1})}(h^{-1}),(k^{-1})^{(h^{-1})}\right)$ であることは、(11),(12),(14) により次のように確かめられます。

$$\begin{aligned}(h,k)\left({}^{(k^{-1})}(h^{-1}),(k^{-1})^{(h^{-1})}\right) &= \left(h\left({}^{k(k^{-1})}(h^{-1})\right),\left(k^{\left({}^{(k^{-1})}(h^{-1})\right)}\right)\left((k^{-1})^{(h^{-1})}\right)\right)\\ &= \left(hh^{-1},(kk^{-1})^{(h^{-1})}\right)\\ &= (1,1)\end{aligned}$$

以上により $H \bowtie K$ が群をなすことが確認できました。

いま、$H \bowtie K$ において、H の K への右作用が自明である、つまり、$\forall h \in H,\ \forall k \in K$ に対して $k^h = k$ とすると、(13) が (5) に、(15) が (6) に退化し、$H \bowtie K$ が $H \rtimes K$ に退化していることがわかります。つまり、Bicrossed Product は半直積の概念を包括しています。

ここで本当は、群の Bicrossed Product の具体例を紹介したいのですが、残念ながら私は、具体例を知りません。しかし、文献 [1] においては、群ではなく Bialgebra という対象の Bicrossed Product が具体的に構成されています。数理物理の世界でヤン・バクスター方程式という代数方程式があるのですが、その解を構成する一つの例として、[1] には Bicrossed Product が登場します。複雑ですが、非常に美しい体系が作られており、お薦めの一冊です。

5 最後に

私は半直積という非対称な概念が嫌いでした。しかし、一度 Bicrossed Product という概念を知り、対称性の高さに感心しつつも厳しい条件 (11)-(14) を考えると、逆に半直積の有用性が理解できました。半直積が素晴らしいのは、(13) が退化した (5) が「準同型」という扱いやすい性質だからです。逆に (5) を仮定するためには、H の K への右作用が自明でなければなりません。つまり、半直積は二項演算としての対称性を犠牲にしつつも、扱いやすい別の対称性を構成する手段と言えます。実用的ではなさそうな群の Bicrossed Product ですが、半直積の特殊性を浮き彫りにできるだけでも、価値のある概念だと私は思います。

参考文献

[1] C.Kassel, Quantum Groups, Springer-Verlag, GTM vol.155 (1995)
[2] 山崎圭次郎, 環と加群, 岩波書店, 岩波基礎数学選書 (1990)