アセット・シェアに影響を与えない解約返戻金水準について

（生保 1 第 3 章「アセットシェア」29〜31 ページ）

以下のように記号を定義する。（いずれも保険金額 1 あたり。）

AS_t	:	第 t 年度末有効契約に対するアセット・シェア
P_t	:	第 t 年度の純保険料率
W_t	:	第 t 年度の解約返戻金率
i_t	:	第 t 年度の資産運用利回り
q_t^d	:	第 t 年度の死亡率
q_t^w	:	第 t 年度の解約・失効率
q_t^*	:	第 t 年度の絶対死亡率

ここで q_t^d は、q_t^* と q_t^w を用いて、$q_t^d = q_t^* \left(1 - \frac{q_t^w}{2}\right)$ と表わされるものとする。また、AS_t は AS_{t-1} とその他の変数を用いて、次の漸化式で計算されるものとする。

$$AS_t = \frac{(AS_{t-1} + P_t)(1+i_t) - (q_t^d + W_t\ q_t^w)(1+i_t)^{1/2}}{1 - q_t^d - q_t^w} \tag{1}$$

この式は、次のように書き換えられる。

$$AS_t(1 - q_t^d - q_t^w) = (AS_{t-1} + P_t)(1+i_t) - (q_t^d + W_t\ q_t^w)(1+i_t)^{1/2} \tag{2}$$

いま、$AS_{t-1},\ P_t,\ W_t,\ i_t,\ q_t^*$ を定数とし、q_t^w を変数と考え、q_t^w によらず AS_t が一定となる W_t を考えたい。$\frac{dq_t^d}{dq_t^w} = -\dfrac{q_t^*}{2}$ などに注意して (1) の両辺を q_t^w で微分すると、次のようになる。

$$\frac{d}{dq_t^w} AS_t = \frac{-\left(-\dfrac{q_t^*}{2} + W_t\right)(1+i_t)^{1/2} \cdot (1 - q_t^d - q_t^w) - AS_t(1 - q_t^d - q_t^w) \cdot \left(\dfrac{q_t^*}{2} - 1\right)}{(1 - q_t^d - q_t^w)^2}$$

AS_t が一定となるためには、この値が 0 となる、すなわち、次の式が成り立つことが必要となる。

$$\left(-\frac{q_t^*}{2} + W_t\right)(1+i_t)^{1/2} = AS_t\left(1 - \frac{q_t^*}{2}\right) \tag{3}$$

$$W_t = AS_t\left(1 - \frac{q_t^*}{2}\right)(1+i_t)^{-1/2} + \frac{q_t^*}{2} \tag{4}$$

(3) の両辺に q_t^w を乗じて、(2) の両辺にそれぞれ加える。このとき、$1 - q_t^d - q_t^w = 1 - q_t^* - \left(1 - \frac{q_t^*}{2}\right) q_t^w$ および $q_t^d + \frac{q_t^*}{2} q_t^w = q_t^*$ を用いて整理すると、次の式が得られる。

$$AS_t = \frac{(AS_{t-1} + P_t)(1+i_t) - q_t^*(1+i_t)^{1/2}}{1 - q_t^*} \tag{5}$$

（なお、この式は、(1) に特殊値 $q_t^w = 0$ を代入しても得られる。）
(4) の右辺の AS_t に (5) の右辺を代入すると、次の式が得られる。

$$W_t = \frac{(AS_{t-1} + P_t)(1+i_t) - q_t^*(1+i_t)^{1/2}}{1 - q_t^*} \cdot \left(1 - \frac{q_t^*}{2}\right)(1+i_t)^{-1/2} + \frac{q_t^*}{2} \tag{6}$$

q_t^w によらず AS_t が一定となるには、$AS_{t-1},\ P_t,\ i_t,\ q_t^*$ を用いて、W_t がこのように書かれることが必要である。

逆に、(6) で得られる W_t を用いると、(5) が成り立つことが示され、AS_t は q_t^w によらず一定となることが確認できる。またこのとき、(4) も成り立ち、この式は次のように近似される。

$$\begin{aligned} W_t &\approx AS_t\left(1 - \frac{q_t^*}{2}\right)\left(1 - \frac{i_t}{2}\right) + \frac{q_t^*}{2} \\ &= AS_t + \frac{q_t^*}{2}(1 - AS_t) - \frac{i_t}{2}AS_t + \frac{i_t q_t^*}{4}AS_t \end{aligned}$$

これより、$W_t \approx AS_t$ とした場合の 1 次の近似誤差は、$\frac{q_t^*}{2}(1 - AS_t) - \frac{i_t}{2}AS_t$ である。