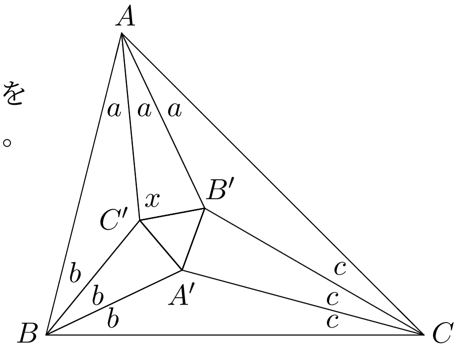
正弦定理で Morley の定理に挑む

成川淳

高校数学は現代数学や現代科学の基礎をなし、すべてが興味深い。しかしながら、その発展性を無視してもなお、おもしろいのが三角関数だと私は思う。三角関数は視覚的直感と抽象的思考を兼ね備えた道具であり、それ自体が美しく、おもしろい。本稿では特に、メネラウスの定理、チェバの定理、そして Morley（モーレイ、モーリー）の定理を正弦定理で一貫して証明していくことで、それらの感覚を紹介していきたい。

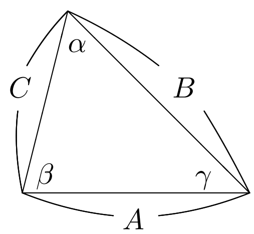
Morley の定理　任意の三角形 ABC について、右図のように、それぞれの角の三等分線を引き、交点を A', B', C' とおくと、三角形 $A'B'C'$ は正三角形となる。（a, b, c, x の記号は証明に用いる。）



これを証明するにあたって、まずは正弦定理を確認しておこう。

正弦定理　右下の図のような任意の三角形について、外接円の直径を R とおくと、

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma} = R$$

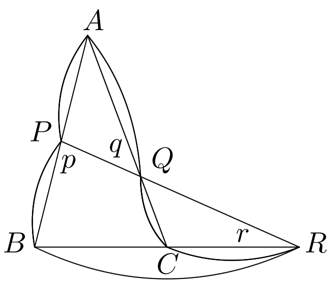


が成り立つ。また本稿では特に、以下の形で用いることが多い。

$$\frac{C}{B} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

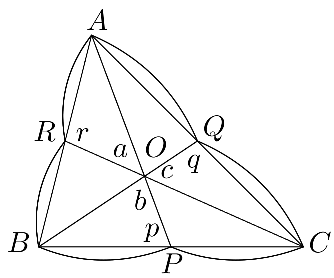
正弦定理はこれだけの簡単な定理であるが、便利な定理である。その応用例として、まずは有名なメネラウスの定理とチェバの定理[1] を紹介する。どちらも補助線を使って簡単に証明できるが、以下のように正弦定理でも簡単に証明できるのが驚きである。

メネラウスの定理



$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

チェバの定理



$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

[1]筆者は昔、「千葉の定理はあるのに埼玉の定理はないんですか？」と言って塾の先生を困らせたことがある。

正弦定理による証明　左の図のメネラウスの定理は、次のように示される。

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{AP}{QA}\cdot\frac{BR}{PB}\cdot\frac{CQ}{RC}=\frac{\sin q}{\sin(180^\circ-p)}\cdot\frac{\sin p}{\sin r}\cdot\frac{\sin r}{\sin q}=1$$

一方、右の図のチェバの定理は、次のように示される。

$$\begin{aligned}\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA} &= \frac{AR}{AO}\cdot\frac{AO}{QA}\cdot\frac{BP}{BO}\cdot\frac{BO}{RB}\cdot\frac{CQ}{CO}\cdot\frac{CO}{PC}\\ &= \frac{\sin a}{\sin r}\cdot\frac{\sin(180^\circ-q)}{\sin b}\cdot\frac{\sin b}{\sin p}\cdot\frac{\sin(180^\circ-r)}{\sin c}\cdot\frac{\sin c}{\sin q}\cdot\frac{\sin(180^\circ-p)}{\sin a}\\ &= 1 \qquad \square\end{aligned}$$

いくつかの異なる定理が、一つの手法だけで証明されていくのは非常に美しい。そうなると他にも上の例のように、正弦定理だけで証明できる例があるのではないか、と試してみたくなる。そこで考えたのが、正弦定理の Morley の定理への応用である。

Morley の定理には初等幾何的な[2]証明がいくつか知られているが、今回は三角関数を用いた証明を 2 つ紹介する。証明にあたって、3 つの補題を用意した。

補題 1　一般に、$\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$ が成り立つ。

補題 2　$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ のとき、$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$ が成り立つ。

補題 3　0° 以上 180° 未満である角 x_1, x_2, y_1, y_2 について、$x_1+x_2=y_1+y_2$、かつ、$\sin x_1\sin x_2=\sin y_1\sin y_2$ ならば、$(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$ または $(x_1,x_2)=(y_2,y_1)$ である。

補題 1 は、加法定理を使って両辺を展開していけば容易に確認できる。慣れた人であれば、右辺の展開には積和公式を使うとよい。補題 2 は、非対称な式なのが気になるが、対称性を意識した証明を本稿末尾の補足で紹介している。補題 3 は、直感的には自明なような補題である。積和公式および和積公式を用いた証明もできるが、基本的な加法定理のみによる証明を補足で紹介している。（自信作です。）

本稿の主旨として、正弦定理だけで Morley の定理を示したいのだが、まずは正弦定理と余弦定理を組み合わせた一般的な証明をご覧いただきたい。途中、補題 1 と 2 も用いている。

一般的な Morley の定理の証明　$\triangle AC'B'$ の各辺の長さを調べたい。以下、$\triangle ABC$ の外接円の直径を R とおき、$a+b+c=60^\circ$ および $\sin\alpha=\sin(180^\circ-\alpha)$ は断らずに用いる。

$\triangle ABC'$ および $\triangle ABC$ に正弦定理を適用すると、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}AC' &= AB\cdot\frac{\sin\angle ABC'}{\sin\angle AC'B}\\ &= R\sin\angle ACB\cdot\frac{\sin\angle ABC'}{\sin\angle AC'B}\\ &= R\sin 3c\cdot\frac{\sin b}{\sin(180^\circ-a-b)}\\ &= R\cdot 4\sin c\sin(60^\circ+c)\sin(60^\circ-c)\cdot\frac{\sin b}{\sin(60^\circ-c)}\\ &= 4R\sin c\sin(60^\circ+c)\sin b\end{aligned}$$

[2]そもそもコンパスと定規で角の 3 等分はできないので、この定理が初等幾何の範疇にないという説もある。

途中、補題 1 を用いた。また同様に、$AB' = 4R\sin b\sin(60^\circ + b)\sin c$ も成り立つ。

さらに、$\triangle AC'B'$ に余弦定理を適用し、補題 2 を用いると次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
C'B'^2 &= AC'^2 + AB'^2 - 2\cdot AC'\cdot AB'\cos\angle C'AB' \\
&= (4R\sin b\sin c)^2\{\sin^2(60^\circ + c) + \sin^2(60^\circ + b) - 2\sin(60^\circ + c)\sin(60^\circ + b)\cos a\} \\
&= (4R\sin b\sin c)^2\sin^2 a
\end{aligned}$$

よって、$C'B' = 4R\sin a\sin b\sin c$ が得られた。この式は a, b, c について対称な式であり、辺 $A'B', A'C'$ も同じ長さである。よって、$\triangle A'B'C'$ は正三角形である。 $\square$

自然な証明ではあるが、余弦定理によって登場した 2 次式を処理するために、補題 2 の不自然な式に頼ってしまっている。次に紹介する私の方法では、同じく $\triangle AC'B'$ に注目するのだが、辺の長さではなく、角の大きさに重点を置いている。証明に不自然さはあるものの、正弦定理を用いた一貫性がある。補題 2 の代わりに補題 3 を用いる。

正弦定理による Morley の定理の証明　まず、$\triangle AC'B'$ の角の大きさを調べたい。そのために、辺の長さに関する次のような自明な恒等式を考え、各項に正弦定理を適用していく。

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB'}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{AC'}$$

以下、$\angle AC'B' = x$ とおき、$a+b+c = 60^\circ$ および $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ は断らずに用いる。

恒等式の左辺については、$\triangle AC'B'$ に正弦定理を用いることで、

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{\sin x}{\sin(180^\circ - a - x)} = \frac{\sin x}{\sin(a + x)}$$

である。同様に、恒等式の右辺については、$\triangle AB'C$,$\triangle ABC$,$\triangle ABC'$ に正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}
\frac{AB'}{AC} &= \frac{\sin c}{\sin(180^\circ - a - c)} &&= \frac{\sin c}{\sin(60^\circ - b)}\ , \\
\frac{AC}{AB} &= \frac{\sin 3b}{\sin 3c} &&= \frac{4\sin b\sin(60^\circ + b)\sin(60^\circ - b)}{4\sin c\sin(60^\circ + c)\sin(60^\circ - c)}\ , \\
\frac{AB}{AC'} &= \frac{\sin(180^\circ - a - b)}{\sin b} &&= \frac{\sin(60^\circ - c)}{\sin b}
\end{aligned}$$

である。途中、補題 1 を用いた。さて、最初の恒等式にこれらを代入して右辺を約分すると、

$$\frac{\sin x}{\sin(a + x)} = \frac{\sin(60^\circ + b)}{\sin(60^\circ + c)}$$

である[3]。また、$\sin(60^\circ + c) = \sin(60^\circ + a + b)$ なので、次のように式変形できる。

$$\sin x\ \sin(60^\circ + a + b) = \sin(a + x)\sin(60^\circ + b)$$

補題 3 が適用できて、$a \neq 0$ より、$x = 60^\circ + b$、つまり、$\angle AC'B' = 60^\circ + b$ が示される。

図形の対称性より、$\angle BC'A' = 60^\circ + a$ も言え、また明らかに、$\angle AC'B = 180^\circ - a - b$ なので、$\angle B'C'A' = 60^\circ$ となる。同様に、$\triangle A'B'C'$ のすべての角は 60° である。 $\square$

[3] これは x に関する方程式である。x について数値解を決定したり、Arctan で書き下したりもできる。

いかがでしたでしょうか？私としては、Morleyの定理の証明で、どちらが優れているかという議論をしたいわけではなく、正弦定理だけでも道具として十分な可能性を秘めているということを紹介したかったのです。もちろん余弦定理は、辺の長さと角の大きさから残りの辺の長さを導く直接的な定理で、すばらしいものです。一方で正弦定理は、辺の長さの比を角のsinの比に変えたり、外接円の情報を引き出す定理で、すばらしいものです。比というと間接的な表現のようにも思えますが、具体的に辺の長さを求める必要がないのであれば、正弦定理で十分なこともあります。本稿では、具体例を通してこの感覚を紹介しました。

＜補足＞ 補題2の証明　加法定理により、一般に次の式が成り立つ[4]。

$$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)$$

さらに $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ ならば、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= -1+\cos(180^\circ-2\alpha)+\cos(180^\circ-2\beta)+\cos(180^\circ-2\gamma) \\ &= -1-\cos 2\alpha-\cos 2\beta-\cos 2\gamma \\ &= -1-(2\cos^2\alpha-1)-(2\cos^2\beta-1)-(2\cos^2\gamma-1) \\ &= -2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1) \end{aligned}$$

途中、二倍角の公式を用いた。これを整理すると、次のようになる。

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

ここで、α を $90^\circ-\alpha$ に、β を $90^\circ-\beta$ に、γ を $180^\circ-\gamma$ に置き換え、$\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$ を用いると、補題2の式になる。$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ の条件も変わらない。　□

＜補足＞ 補題3の証明　加法定理により、一般に次の式が成り立つ。

$$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$$

ここで、$\alpha=x_1-y_1,\ \beta=x_1,\ \gamma=y_2$ とすると、

$$\sin(x_1-y_1)\sin(x_1-y_2)+\sin x_1\sin(y_2-x_1+y_1)+\sin y_2\sin(-y_1)=0$$

すなわち、次の式が成り立つ。

$$\sin(x_1-y_1)\sin(x_1-y_2)=\sin y_1\sin y_2-\sin x_1\sin(y_1+y_2-x_1)$$

与えられた条件の場合、この値は0であるので、$x_1=y_1$ または $x_1=y_2$ である。　□

成川淳 (なるかわあつし)

[4]三角関数のあらゆる公式は、有限個の有名公式から「生成」されているようである。以前から気になっていたのだが、この「生成」を、群と写像の言葉でうまく表現できないものだろうか。多項式環やテンソル代数などを使っても良いかもしれない。