研修報告書

２００４年9月1日

所属　都立北多摩高等学校
氏名　平井　孝夫

2004 年度夏季休業中の研修について、研修内容・成果を下記の通り報告します

実施月日　　７月２９日 (木)、３０日 (金)、８月５日（木)、６日（金)、１９日（木)、２０日（金)、２３日（月)、２４日（火)、２６日 (木)、２７日 (金)、３０日 (月）

記

研修主題

数列の問題を中心に、センター試験の問題を分析し、これからの教科指導の指導法を研究する。

1. はじめに

本年度の自己申告書の学習指導、進路指導、研修・研究の欄にも書いたように、生徒の進路実現に向けてその具体的方策を検討している。本来は進路実現という以前に、人生設計に関わる長期的なスパンを射程に入れた指導が大切であることは言うまでもない。本年度の進路部の部会では、センター試験を中心に検討し、生徒がセンター試験に対して自信を持って臨み、その力を十分発揮する方策を検討している。そして、１学期に実施した３年生対象の「進路説明会」では、センター試験を中心テーマに据え、基礎事項の確認をし、その内容をしっかり理解することが学力伸張に欠かせないことを話した。この研修報告では、数学の一分野である数列をテーマに、センター試験ではどのような問題が出題され、それがどのような基礎事項に基づいているのかを分析し、生徒が苦手とする数列の指導法について検討する。

2. 数列の学習について

新課程では、数学Ｂで扱われている数列は、旧課程では、数学Ａに入っている。その学習内容は
等差数列　等比数列　和の記号 $\sum$　a_n と S_n の関係　部分分数　階差数列　群数列　漸化式　数学的帰納法　二項定理 となっており、列記しただけでもこれだけの項目があり、学習内容の豊富さは何ら変わっていない。新しい記号が多く入り、公式を導く過程でのアイデアは数学的に興味あるものばかりであるが、生徒にとっては分かりづらいものがある。

数列の学習を端的に言えば、数が並んでいるとき、その**規則性をどのように発見していくのか**、その**規則性をどのように数式として表現していくのか、逆に数式からその規則性が読み取れるか**、の２点を学習することであろう。数列は自然数 n の関数であり、離散的な数量に関する捉え方を学習する。例えば、離散量ゆえ隣りという概念があるので、n と $n+1$ の関係が当然問題になってくる。過去のセンター試験を検討してみると、基本的にはこの２点が身についているかを問うものがほとんどであることが分かる。

3. センター試験過去の問題

それでは、過去のセンター試験の数列に関する問題を検討していく。アルファベットを付けた下線部分がキーとなるところであり、その部分についてどのようなことが問題にされているのかを検討した結果を文章化した。

２００４年１月実施

(1)　整数からなる等比数列 $\{a_n\}$ が、$\underline{a_1 + a_2 = 32, \quad a_4 + a_5 = 864}_{\ a}$ をみたしている。

このとき、

$a_n = [\ \textbf{ア}\ ] \cdot [\ \textbf{イ}\ ]^{n-1}$ であり、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \underline{(a_k + 4k - 2)}_{\ b} = [\ \textbf{ウ}\ ] \cdot [\ \textbf{エ}\ ]^n + [\ \textbf{オ}\ ]n^2 - [\ \textbf{カ}\ ]$ となる。

(2)　分数 $\dfrac{9}{37}$ を小数で表したときに 小数第 n 位に現れる数 $_c$ を b_n とする。

すべての自然数 n に対して $\underline{b_{n+p} = b_n}_{\ d}$ となる最小の自然数 p は $[\ \textbf{キ}\ ]$ であり、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{100} b_k = [\ \textbf{クケコ}\ ]$ である。

下線 a は、隣接２項の関係であること、a_1 と a_4 とが３項離れていることが読み取れるかが問われている。この式より、公比 r が $r^3 = 27$ を満たすことが分かる。

下線 b は等比数列と等差数列の単純な和の計算であるが、和の記号 $\sum$ の中に a_k と k の式が混ざっていることで慌てないか。

下線 c は実際に割り算をすればこの文章の意味が理解できるのである。

下線 d は $b_1 = b_4 = b_7 = \cdots\cdots = 2, \quad b_2 = b_5 = b_8 = \cdots\cdots = 4, \quad b_3 = b_6 = b_9 = \cdots\cdots = 3$ が理解できるか。そして、$b_{3k-2} = 2$ をみたす項数が間違いなく出せるか

２００３年１月実施

(1)　等比数列 $\underline{\ 18, \quad -6\sqrt{3}, \quad 6, \quad \cdots\cdots\ }_{\ a}$ の第 6 項は $\dfrac{[\ \textbf{アイ}\ ]\sqrt{[\ \textbf{ウ}\ ]}}{[\ \textbf{エ}\ ]}$ であり、初項から第 15 項までの 奇数番目の項の和$_b$ は $\dfrac{[\ \textbf{オカキク}\ ]}{[\ \textbf{ケコサ}\ ]}$ である。

２００３年１月実施

(2)　数列

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, \quad \cdots\cdots$$

の第 n 項を a_n とする。この数列を

$$1 \mid 2, 2 \mid 3, 3, 3 \mid 4, 4, 4, 4 \mid 5, 5, 5, 5, 5, \mid 6, \quad \cdots\cdots$$

のように 1 個、2 個、3 個、4 個、$\cdots\cdots$ と区画にわける。

第 1 区画から第 20 区画までの区画に $\underline{\text{含まれる項の個数}}_{\ c}$ は [**シスセ**] であり、$a_{215} =$ [**ソタ**] となる。また、第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる $\underline{\text{項の和の総和}}_{\ d}$ は [**チツテト**] であり

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots \ + a_n \geqq 3000$$

となる最小の自然数 n は [**ナニヌ**] である。

下線 a は、単純に公比が読み取れるか。

下線 b は奇数番目の項だけであるから、公比は 2 乗されること、項数も間違いなく求められるか。

下線 c と下線 d は、群数列と呼ばれるもので、各区画において、第 n 区画には数 n が n 個入っていることが整理できるかがポイントになろう。

２００２年１月実施

(1)　初項が 0 でない等比数列 $\{a_n\}$ が $a_1 + 2a_2 = 0$ を満たしている。

このとき、公比は $\dfrac{[\ \textbf{アイ}\ ]}{[\ \textbf{ウ}\ ]}$ である。$\underline{a_1 + a_2 + a_3}_{\ a} = \dfrac{9}{4}$ ならば、

$\underline{a_4 + a_5 + a_6}_{\ a} = \dfrac{[\ \textbf{エオ}\ ]}{[\ \textbf{カキ}\ ]}$ であり、$\underline{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{a_n} = 57}_{\ b}$

となるのは $n =$ [**ク**] のときである。

(2)　$\underline{b_n = pn + q}_{\ c}$ で表される数列 $\{b_n\}$ に対して、初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$b_7 = 1,\ \ S_{12} = 10$ ならば、$p = \dfrac{[\ \textbf{ケ}\ ]}{[\ \textbf{コ}\ ]},\ \ q = \dfrac{[\ \textbf{サシ}\ ]}{[\ \textbf{ス}\ ]}$ であり、

$\underline{S_1 + S_2 + \cdots\cdots + S_{12}}_{\ d} = \dfrac{[\ \textbf{セソ}\ ]}{[\ \textbf{タ}\ ]}$ である。

下線 a は、２００４年度実施の問題と同じで、３項のずれが読み取れるか。

下線 b は、等比数列の各項の逆数で作られる数列もまた等比数列で、初項も公比も逆数になることが理解されているか。

下線 c は、第 n 項が n の一次式である数列は等差数列であること、また、その一次の係数が公差を表していることが理解されているか。

下線 d は、一般項が数列の和で表されている数列の和 $\sum(\sum a_k)$ の形 を求める問題である。

２００１年１月実施

(1)　数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$a_1 = 2,\quad a_2 = 3,\quad \underline{a_{n+2} - a_n = 4}_{\ a}\ (n = 1, 2, 3,\ \cdots\cdots)$　このとき、

$a_3 = [$ **ア** $],\quad a_4 = [$ **イ** $],\quad a_5 = [$ **ウエ** $],\quad a_6 = [$ **オカ** $]$ であり、

$a_{40} = [$ **キク** $]$ である。また、$\displaystyle\sum_{k=1}^{40} a_k = [$ **クコサシ** $]$ である。

(2)　数列 $\{b_n\}$ の <u>各項から定数 c を引いて得られる数列</u> $_b$ は、公比 2 の等比数列である。

$b_3 = 7,\quad b_4 = 11$ であるとき、$c = [$ **ス** $],\quad b_1 = [$ **セ** $]$ である。また、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_k = [$ **ソタチツ** $]$ である。

下線 a は、２００４年度実施の下線 d、あるいは２００３年度の下線 b の部分と同じ考え方の問題で、２項のずれが読み取れるか。

下線 b は、教科書でも触れられているが、等差数列でも等比数列でもない、漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ で与えられた数列を等比数列の問題に帰着させるものである。

4.　新教育課程とセンター試験

２でも触れたが、今回の教育課程の改訂により「数学　」「数学　」「数学　」「数学Ａ」「数学Ｂ」「数学Ｃ」は科目名が変わらないものの、各科目の学習内容が変更されたので、注意を要する。現２年生が受験する、２００６年入試では各大学の指定科目に変更があるかどうか調べてみたところ、現行科目をそのまま踏襲するようである。また、私立大学の文系学部を中心に多く見られる「数学　、Ａ」を課すパターンでは、以前数学Ａに入っていた「数列」が新課程では「数学Ｂ」に移行したので新たに文系学部でも「数学Ｂ」を指定することも予想されたが、指定科目にする大学はないようである。

5. 最後に

いつも感じていることであるが、数学の学習ほど基礎事項を徹底的に理解していないとその先の事柄が分からないものはない。それでは、基礎事項の理解とは何であろうか。それは、唯単に教科書に書いてあることを読んだり、公式を覚えたり、答合わせをして合ったので良しとする程度のことではない。「理解」とは、証明を導くときのアイデアが必然性を持っていることを感覚的に分かること、基礎的な問題に出会ったとき、その解法が直ぐに頭の中で思い浮かぶことではなかろうか。今回のこの研修成果を踏まえ、更に教科指導においてこのことを念頭において授業展開をしていきたい。

主な参考文献・資料

２００４年６月実施　　第３学年進路説明会レジュメ（平井孝夫）

２００４年度　センター試験徹底分析　進研ニュース特集号

２００４年度　Guideline　臨時増刊号（河合塾）

大学への数学　数学Ａ　東京出版