研修報告書

２００２年9月２日

所属　都立北多摩高等学校

氏名　平井　孝夫

2002 年度夏期休業中の研修について、研修内容・成果を下記の通り報告します

記

研修主題

複素平面を中心として、代数的、幾何学的関点の連関を調べ、系統的に理解を深める指導法

２乗すると -1 になる虚数単位 i で構成される数の世界 ”複素数 ”について歴史的背景を考察をすることを通じ、複素数の導入部分の展開の方法を検討する。

1. ２次方程式・３次方程式

数学において言葉や記号は本質的である。２次方程式の解の公式の発見は４０００年前、０の発明は１３００年前、そして小数の発明はわずか５００年前であると言われている。０や小数という記号法の発明がいかに難しかったかがわかる。方程式の解法の歴史は意外に古く、エジプトでは１次方程式が解かれ、メソポタミア文明のバビロニアでは２次方程式が解の公式で解かれていた。実数を係数とする２次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0 \tag{1}$$

は、１年の初期段階で

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

で求められることを学習する。しかし、判別式 $D = b^2 - 4ac$ が負の場合は平方根 $\sqrt{b^2 - 4ac}$ に問題があることは昔から知られていた。２乗して $D = b^2 - 4ac < 0$ となる実数は存在しないからである。この場合、２次方程式 (1) は解を持たないと考えるほうが自然かもしれない。事実、高校での数学Ｉでは「解なし」として扱う事になっている。しかし、３次方程式の解法を考えると複素数が必要なってくる。次の公式は３次方程式のカルダノによる解法と呼ばれているものである。

任意の３次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ はカルダノの変換 $x = X - \frac{a}{3}$ を適用すれば、

$$x^3 + px + q = 0 \tag{3}$$

となるので、これを３次方程式の一般形として扱ってよい。

今、因数分解 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ を使って、カルダノの解法を導びいてみる。

$$-3yz = p, \quad y^3 + z^3 = q$$

を満たす y, z を求めれば、$x = -y - z$ が解になる。$y^3z^3 = -\frac{p^3}{27}$ であるから、y^3, z^3 は２次方程式 $x^2 - qX - \frac{p^3}{27} = 0$ の解で、その解は $\frac{1}{2}\left(q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right)$ なので、y, z は $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}\right)}$ となる。

したがって、(3) の解

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

が得られる。

一般的には、次のようにしてカルダノの解法を導く

$$t-u=-q \tag{4}$$
$$tu=\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

を満足する数 t,u を考え、$x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$ とおく。すると、$\sqrt[3]{t}\cdot\sqrt[3]{u}=\dfrac{p}{3}$ であることより、

$$x^3=(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})^3=t-3\sqrt[3]{t^2}\sqrt[3]{u}+3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u^2}-u=-q-px \tag{5}$$

が成り立つことが分かり、これより、$x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$ が３次方程式 (3) の解であることを示している。ここで、３乗根 $\sqrt[3]{t},\sqrt[3]{u}$ を求めるには、$x^3=\dfrac{p}{3}$ の解が $\dfrac{p}{3}\omega^j$ ($j=0,1,2$ ただし、ωは $x^3=1$ の虚数解の一つ) であることを用い、$\sqrt[3]{t},\sqrt[3]{u}$ のかわりに $\sqrt[3]{t}\omega,\sqrt[3]{u}\omega^2$ または $\sqrt[3]{t}\omega^2,\sqrt[3]{u}\omega$ を使うこともできる。したがって、３次方程式 (3) の解は

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$
$$\omega\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\omega^2\cdot\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$
$$\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\omega\cdot\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \tag{6}$$

の３つであることが分かる。

2. カルダノによる解法を具体的に使ってみると

カルダノの公式を使って、解 $x=1$ を持つ方程式 $x^3+x-2=0$ を解いてみると

$$1=\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{1}{27}}}-\sqrt[3]{-1+\sqrt{1+\frac{1}{27}}}$$

なる式が得られる。この式も一見不思議な感じがする。がしかし、それ以上に、この公式は奇妙な性質を持っている。

いま、３次方程式 $x^3-15x-4=0$ (7)

を考えると、左辺は $(x-4)(x^2+4x+1)$ と因数分解されるので、**３つの実数の解**

$$x=4,\quad -2+\sqrt{3},\quad -2-\sqrt{3}$$

を持つことがわかる。一方、カルダノの公式を使うと、解として

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}} \tag{8}$$

が登場する。３乗根をとる前の $\pm 2+\sqrt{-121}$ はともに虚数である。しかし、(8) は方程式 (7) の解であるから実数のはずである。実は、ボンベリは、$(2\pm\sqrt{-1})^3=2\pm 11\sqrt{-1}=2\pm\sqrt{-121}$ であることに気づき、(8) が $x=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4$ となることを証明している。つまり、複素数が数学的に有用であるという可能性を示唆したのである。デカルト、ニュートンは、負の数の平方根を含む表現を ”虚 ”として、それは問題が解けないしるしと考えていたようである。このよう

に、カルダノを初めとする同時代の数学者はこの事実を深く追求することは出来なかったようだ。実は、当時、負の数の概念も十分確立しておらず、$(-1)\times(-1)=1$ をめぐって混乱していた時代である。カルダノは論文まで出して、マイナス×マイナスがマイナスになると主張していたらしい。

それでは、我々がマイナス×マイナスがプラスという根拠をどこに求めるのか。それは、分配法則にある。数式で表せば、$ax+bx=(a+b)x$ である。分配法則を使って、

$$1\times(-1)+(-1)\times(-1)=0\times(-1)=0$$

となる。ところが、$1\times(-1)=-1$ なので、$(-1)\times(-1)=1$ とならざるを得ない。我々は今までこの分配法則を何度も使って論理を構築してきているのである。

3. 複素平面において

さて、複素数 $a+bi$ と平面上の点 (a,b) を同一視する複素平面は、数学Ｂの後半部分において学習するが、その導入は天下りと言わざるを得ない。次のような視点に立って指導することが考えられる。まづ、一本の数直線をとり、この数直線上の点で表された実数を -1 倍することとはどんな操作であるかを考える。それは、原点 0 を中心として 180° 回転することである。そこで、$\sqrt{-1}$ 倍を２回行えば -1 倍することになるのであるから、$\sqrt{-1}$ 倍とは、その半分の回転である 90° 回転と決めるのが妥当である。したがって、元の数直線（実軸）に垂直な直線（虚軸）をとるのである。１７世紀、ウォリスはこのような平面を考えていたらしいが、一般に複素平面が認められたのは１９世紀に入ってフランス人アルガンの時代である。ボンベリが複素数を初めて有効に使ってから既に２００年以上経っている。この時代、ハミルトンが２つの実数の組 (a,b) 全体の集合を考え、複素数の代数的定義を与えた。この頃になって、複素数は一切の観念的なものや、”虚なるもの ”のイメージを切り離して、数学の中に確かな場所を占めるようになった。そして、オイラーが代数学の基本定理と呼ばれる「複素数の範囲でなら、方程式に必ず解が見つかる」を証明している。そして、その解を求めることに問題が変わり、ガロアの理論へと進展していくのである。

4. 最後に

先人がどのように対象に取り組んだのかという歴史的背景を踏まえて授業を展開することは大切であると考える。特に、複素数が存在するか否かという生徒の根本的疑問は、数の存在そのものの疑問へとつながっているから殊更である。この夏期休業中の研修は、複素数の歴史的背景を主にあつかった。今後の授業の中でこれらの話を踏まえながら複素数が数学的対象として重要な位置を占めていることを強調していきたい。また、今回不充分であった三角・指数・対数関数などの関連について、今後研修を続けていく必要性を感じている。

主な参考文献

数学が生まれる物語、数学が育っていく物語（第一週～第六週）　　岩波書店　志賀浩二
複素数の世界　日本評論社　上野健爾