

望遠鏡の被写界深度について

長谷 隼佑

はじめに

被写界深度。英語では depth of field といい DOF と略される。これはピントの合う空間の範囲で、写真を撮る人なら誰でも知っている用語であろう。被写界深度はピントが合っている範囲が広い場合、深度が"深い"、狭い場合は"浅い"と表現される。



図 1: 被写界深度 - 深い

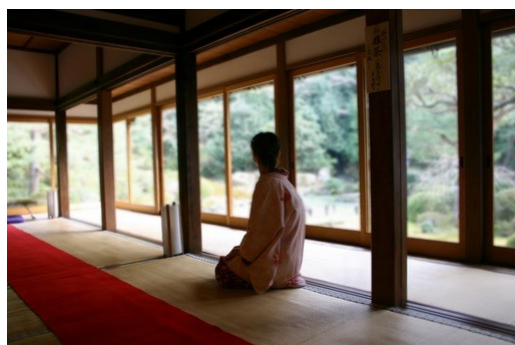


図 2: 被写界深度 - 浅い

カメラにおいては、この被写界深度は重要性が高いため関係する情報が文献や Web 上等で数多く見つかるが、望遠鏡における被写界深度についての情報は殆ど無い。「第 5・光の鉛筆」(鶴田匡夫著/新技術コミュニケーション)という本に望遠鏡の被写界深度について記述されているが、精細な検証や解説がなされていないように見受けられ、独自に研究する必要性を感じた。

一部のユーザーの間では、望遠鏡の被写界深度に対する認識は以前からあった。被写界深度に影響する要素として、まず倍率が挙げられる。これは明らかな差があり、誰が見ても判る。次に信頼性の高い要素として射出瞳径が挙げられる。射出瞳径とは、眼に入射する光束の直径(詳しくは後述)のことだが、これは理論的に確実に影響するであろうと思われる。また、信憑性には欠けるものの、一部の熱心なユーザーの間では、倍率・射出瞳径が同じであれば焦点距離の長いレンズの組み合わせ(詳しくは後述)の方が深度はやや深くなるという。インターネット上のコミュニティ

ではこのような議論が以前に行われたことがあるのだが、結局、結論は出せなかった。

十分な検証ができる環境があれば信頼できる結果が得られるのであろうが、私を含め一般のユーザーはそのような環境に乏しい。そこで幾つかの望遠鏡メーカーに質問してみたのだが、返ってきたのは「分からない」「そのようなことは設計には全く考慮していない」という回答ばかりであった。

以上のような理由から、私は、望遠鏡の被写界深度について独自に研究しようと思いついた。

そしてその結果が以下である。

ニュートンの結像公式

本題に入る前に結像公式について言及しておかなければならない。

高校の物理では、ガウスの結像公式 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ (教科書ではレンズの式と言
い、絶対値を採って $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ と書かれている) という公式を習うが、この式は汎
用性や使い勝手に欠けるため、ここではニュートンの結像公式を用いる。

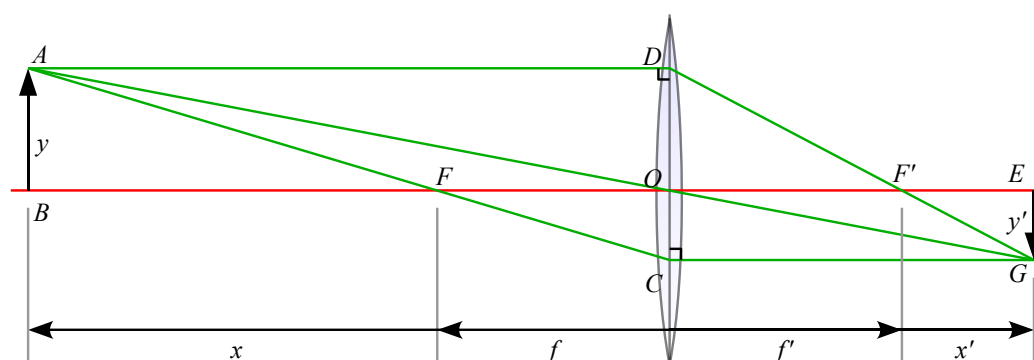


図 3

図 3 において、前側焦点距離、後側焦点距離をそれぞれ f, f' 物高、像高をそれぞれ y, y' とすると

$\triangle ABF \sim \triangle COF$, $OC = EG = y'$ より

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$\triangle DOF' \sim \triangle GEF'$, $OD = BA = y$ より

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f'} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(1),(2)より

$$\begin{aligned} \frac{f}{x} &= \frac{x'}{f'} \\ xx' &= ff' \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

この式(3) がニュートンの結像公式であり、ガウスの結像公式と違いレンズの前後の物質の屈折率が異なっても ($f \neq -f'$ であっても) 適用可能である。また、注意すべき点として、光学系の光路図は数直線と同じように右向きを正、左向きを負として表す。よって、左向きの矢印で表された距離は負の値を取り、図3では $x < 0$, $f < 0$ となる。この法則に則って虚像を作る光路図を描くと図4のようになる。

勿論、この場合でもニュートンの結像公式は適用される。

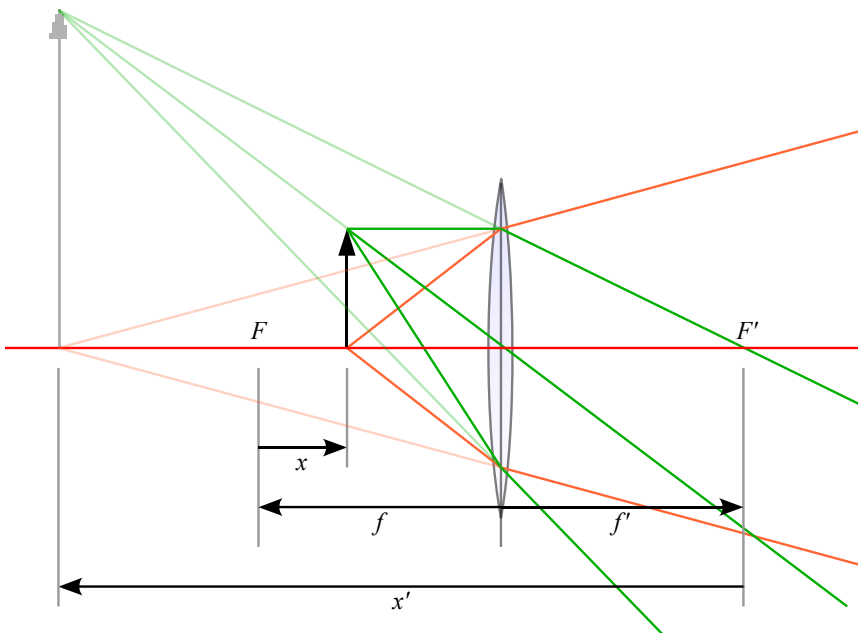


図 4

焦点深度と被写界深度

被写界深度とは光学的には、焦点深度に対する物界の範囲のことである。

例えばデジタルカメラであれば、CCD や CMOS などの記憶媒体の 1 ピクセルの中に点が納まればその範囲内での像の量(ぼ)けは問題にならない。当たり前だが、1 ピクセルより小さな量けは検出できないからだ。これが解像度、もしくは分解能といわれるもので、その 1 ピクセルの直径を許容錯乱円という。

許容錯乱円 ε 、入射瞳径 D 、焦点距離 f が決まると量けの許容範囲 $\alpha'_2 - \alpha'_1$ が決まる。この範囲を焦点深度といい、それに対応する物界の許容範囲 $\alpha_2 - \alpha_1$ を被写界深度という。

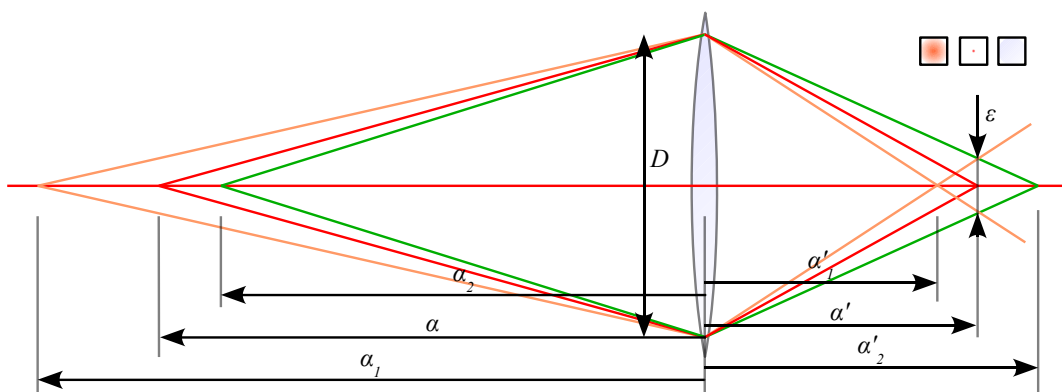


図 5

望遠鏡の原理

望遠鏡は、アフォーカル光学系と呼ばれる焦点の無い光学系である。単レンズでは無限遠から来た平行な 2 本の光線は焦点で交わるが、望遠鏡は無限遠に虚像を作るため、光線が交わることは無いからだ。

望遠鏡で十分に遠い距離にある物体を見るとき 図 6 の θ はほぼ 0 となる。そのため r'_1, r'_2, r'_3 はそれぞれ平行となり、同様に光線 r も平行な光線として対物レンズに入射する。入射した光束が望遠鏡内部の空間で結像し、その実像を接眼レンズで虚像として拡大して見る。これが望遠鏡の仕組みである。

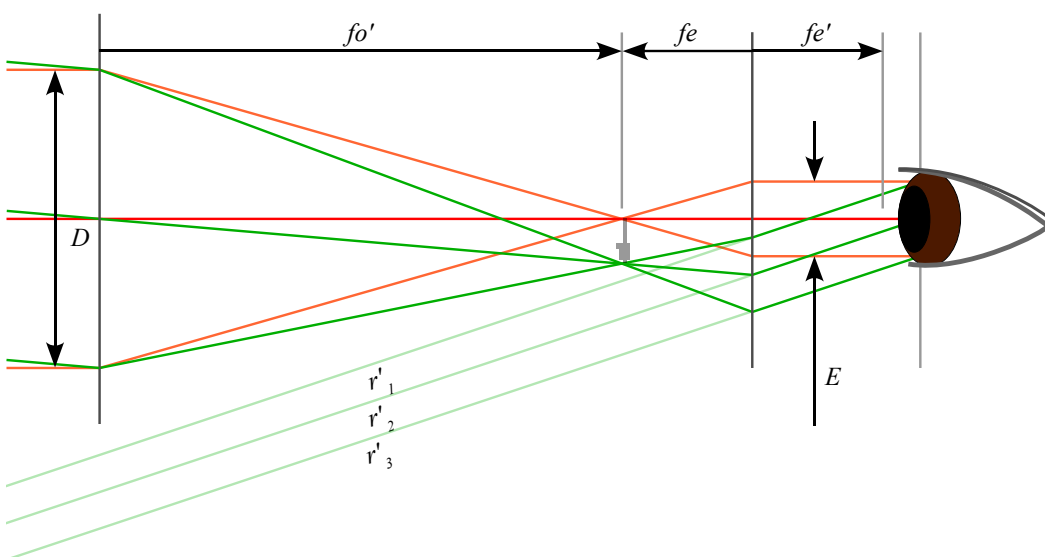
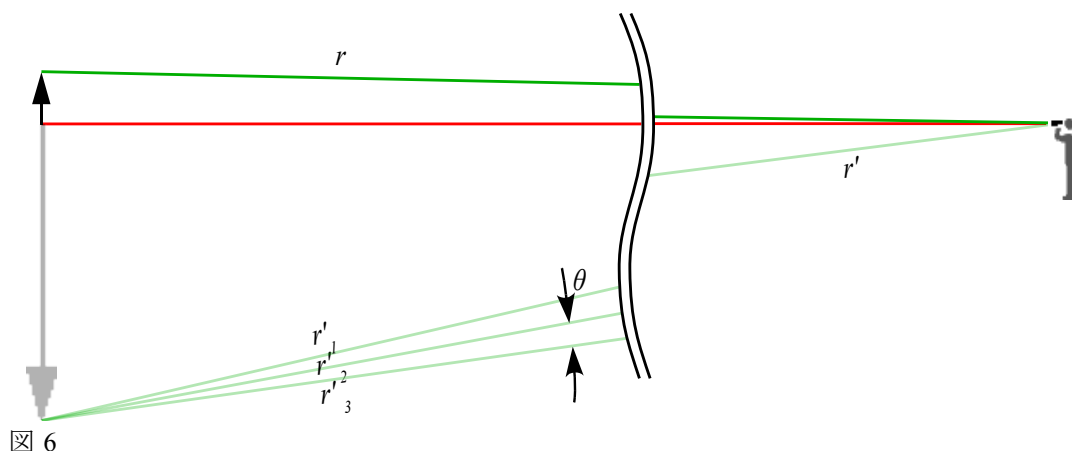


図 7 *以降レンズは省略し、主平面の線で表すこととする

ここで、 D を入射瞳孔、 E を射出瞳孔といい、対物レンズの後側焦点距離を fo' 、接眼レンズの前側焦点距離を fe とすると、倍率 M は以下の式で表せる。

$$M = \frac{D}{E} = -\frac{fo'}{fe} \quad \dots\dots\dots (4)$$

光軸と平行に入射した赤い光束と斜めに入射した緑の光束の交わる位置を射出瞳孔といい、ここに眼を置くことで望遠鏡の像を見ることが出来る。また、対物レンズを負の方向に移動させることで近くにピントが合うようになる。

望遠鏡の結像関係式

被写界深度を考えるには、まず望遠鏡での物体と像の関係式を考える必要がある。

図 8 において、以下のように定義する。ただし、 fo , α は図 8 には示されていない。

fo : 対物レンズの前側焦点距離

fo' : 対物レンズの後側焦点距離

fe : 接眼レンズの前側焦点距離

fe' : 接眼レンズの後側焦点距離

α : 対物レンズ～物点

α' : 射出瞳～接眼レンズでの結像点

β : 接眼レンズの後側焦点～射出瞳

γ : 接眼レンズの前側焦点～対物レンズの後側焦点

so : 対物レンズの前側焦点～物点

so' : 対物レンズの後側焦点～対物レンズでの結像点

se : 接眼レンズの前側焦点～対物レンズでの結像点

se' : 接眼レンズの後側焦点～接眼レンズでの結像点

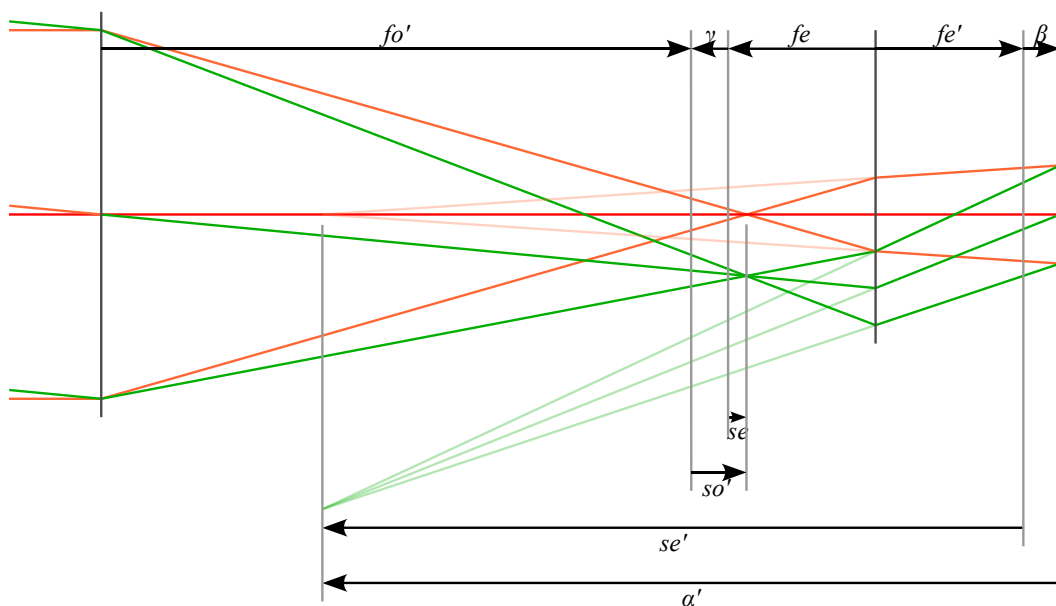


図 8

ニュートンの結像公式より

$$so\ so' = fo\ fo' \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$se\ se' = fe\ fe' \quad \dots\dots\dots (6)$$

定義より

$$so = \alpha - fo \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$se = so' + \gamma \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$se' = \alpha' + \beta \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(5),(7)より

$$so' = \frac{fo\ fo'}{\alpha - fo}$$

式(6),(7),(8)より

$$(so' + \gamma)(\alpha' + \beta) = fe\ fe'$$

また、射出瞳は対物レンズの像であるから、

$$\beta(\gamma - fo') = fe\ fe'$$

$$\beta = \frac{fe\ fe'}{\gamma - fo'}$$

となり、これらの式を α について解くと

$$\begin{aligned} \left(\frac{fo\ fo'}{\alpha - fo} + \gamma\right)(\alpha' + \frac{fe\ fe'}{\gamma - fo'}) &= fe\ fe' \\ \frac{-fo^2}{\alpha - fo} + \gamma &= \frac{-fe^2(\gamma + fo)}{\alpha'(\gamma + fo) - fe^2} \\ \frac{fo^2}{\alpha - fo} &= \frac{fe^2(\gamma + fo) + \alpha'\gamma(\gamma + fo) - \gamma fe^2}{\alpha'(\gamma + fo) - fe^2} \\ \alpha - fo &= \frac{\alpha' fo^2(\gamma + fo) - fo^2 fe^2}{fo fe^2 + \alpha'\gamma fo + \alpha'\gamma^2} \\ \alpha &= \frac{\alpha' fo^3 + 2\alpha'\gamma fo^2 + \alpha'\gamma^2 fo}{fo fe^2 + \alpha'\gamma fo + \alpha'\gamma^2} \\ &= \frac{\alpha' fo(\gamma + fo)^2}{fo fe^2 + \alpha'\gamma fo + \alpha'\gamma^2} \\ &= \frac{fo(\gamma + fo)^2}{\frac{1}{\alpha'}, fo fe^2 + \gamma fo + \gamma^2} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

また、 α' [m] の逆数は眼のピントの調整量であり、この値をディオプターという。

望遠鏡の被写界深度

望遠鏡の倍率は式(4)で示した通り、 $M = \frac{D}{E} = -\frac{fo'}{fe}$ と表される。これにより fo, fe を n 倍しても望遠鏡の倍率は変わらない。ここで、 $fo \rightarrow nfo, fe \rightarrow nfe$ と変化したときの γ の変化量は以下ようになる。

式(8),(5),(6)より

$$\begin{aligned}\gamma x &= se - so' \\ &= -\frac{n^2 fe^2}{se'} + \frac{n^2 fo^2}{so'} \\ &= n^2 \left(\frac{fo^2}{so'} - \frac{fe^2}{se'} \right) \\ \therefore x &= n^2\end{aligned}$$

これを式(10)に代入して

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{n fo (n^2 \gamma + n fo)^2}{\frac{1}{\alpha'} n^3 fo fe^2 + n^3 \gamma fo + n^4 \gamma^2} \\ &= \frac{fo (n \gamma + fo)^2}{\frac{1}{\alpha'} fo fe^2 + \gamma fo + n \gamma^2} \dots\dots\dots (11)\end{aligned}$$

肉眼のディオプター値が $\frac{1}{\alpha'_1} \rightarrow \frac{1}{\alpha'_2}$ と変化するとき、その変化量は $\frac{1}{\alpha'_2} - \frac{1}{\alpha'_1}$ であり、これを $\triangle \frac{1}{\alpha'}$ と定義する。このとき、 α のディオプター値が $\frac{1}{\alpha_1} \rightarrow \frac{1}{\alpha_2}$ と変化するならば、その変化量は同様に $\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1} = \triangle \frac{1}{\alpha}$ となる。 fo, fe を n 倍したときの、物界でのディオプター変化量を $\frac{1}{\alpha_{n2}} - \frac{1}{\alpha_{n1}} = \triangle \frac{1}{\alpha_n}$ とし、 $n \geq 1$ のときの $\triangle \frac{1}{\alpha}$ 及び $\triangle \frac{1}{\alpha_n}$ の大小関係を比べると

$$\begin{aligned}
\triangle \frac{1}{\alpha_n} &= \frac{1}{\alpha_{n2}} - \frac{1}{\alpha_{n1}} \\
&= \frac{\frac{1}{\alpha'_{2}} fo fe^2 + \gamma fo + n \gamma^2}{fo(n\gamma + fo)^2} - \frac{\frac{1}{\alpha'_{1}} fo fe^2 + \gamma fo + n \gamma^2}{fo(n\gamma + fo)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{\alpha'_{2}} fo fe^2 - \frac{1}{\alpha'_{1}} fo fe^2}{fo(n\gamma + fo)^2} \\
&= \frac{fe^2 \triangle \frac{1}{\alpha'}}{(n\gamma + fo)^2} \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

$0 \geq \gamma > fo$ なので

$$\triangle \frac{1}{\alpha} \geq \triangle \frac{1}{\alpha_n}$$

即ち、同倍率であれば対物レンズ・接眼レンズのそれぞれの焦点距離が短い方が肉眼のディオプター変化量に対する変化が大きい。これは被写界深度が深くなることを意味する。また、近視であれば、健常眼の人よりも常に γ が小さくなる (γ の絶対値が大きくなる) ので、被写界深度は比較的浅くなる。ただし、 γ は通常 $0 \geq \gamma \geq fo/10$ 程度と考えられるため、その変化は比較的小さい。(図 9)

式(12)を式(4)を用いて表すと

$$\begin{aligned}
\triangle \frac{1}{\alpha} &= \frac{fe^2 \triangle \frac{1}{\alpha'}}{(\gamma + fo)^2} \\
&= \frac{fo^2 \triangle \frac{1}{\alpha'}}{M^2(\gamma + fo)^2} \dots\dots\dots (13)
\end{aligned}$$

特に、 $\gamma = 0$ のとき

$$\triangle \frac{1}{\alpha} = \frac{\triangle \frac{1}{\alpha'}}{M^2}$$

となる。

$\triangle \frac{1}{\alpha}$ は M^2 に反比例するから、倍率が低いほど被写界深度は深くなる。

式(13)をグラフで表すと以下のようなになる。ただし、縦軸を y , 横軸を x とする。

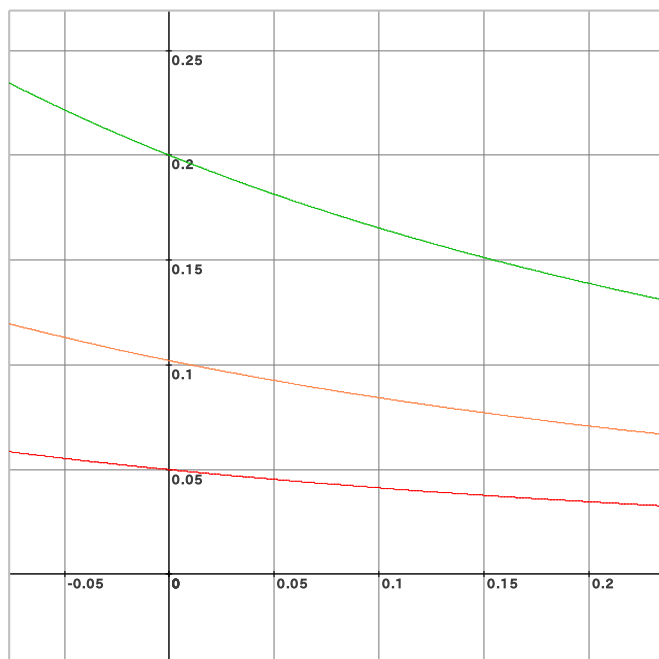


図 9: $y = \triangle \frac{1}{\alpha}$, $x = \frac{\gamma}{fo}$, $\triangle \frac{1}{\alpha'} = -1$,

$fo = 0.2[\text{m}]$, $M = 5(\text{緑}), 7(\text{橙}), 10(\text{赤})$

肉眼の被写界深度

ヒトの目も勿論被写界深度があり、数値化して式(10)を用いると、望遠鏡からヒトの目まで含めた全体的な被写界深度の式が得られる。だが、これは非常に煩雑な式になる上、ヒトの目は絞り・ピントの調節が自動で行われるという複雑な機構であり、式を立てる意味はあまり無いと思われるので省略する。ただし、瞳孔の大きさは図 5 から分かるように被写界深度に影響し、 D が大きいほど深度は浅くなる。このとき望遠鏡を覗く際、瞳孔径 $<$ 射出瞳孔径 であれば、瞳孔径がそのまま被写界深度の要因となるが、瞳孔径 $>$ 射出瞳孔径 の場合、目に入射する光束径は射出瞳孔径に等しいので、深度の要因は射出瞳孔径となる。

また、以下の表の見掛け被写界深度(独自の造語、 α' に対する被写界深度の割合)からも判るように、遠くを見たときの方が被写界深度は大きくなる。ただ、実際に望遠

鏡を覗いたときには数値ほどの差があるようには感じられず、ピントを近点に合わせると覗き辛くなるため、詳細に関しては現段階では残念ながら言及し難い。

参考として以下に肉眼の被写界深度の概算数値を載せておく。

	面	屈折率	曲率半径	間隔
角膜	1	1.38	7.8	0.8
房水	2	1.34	6.8	3
水晶体	3	1.41	9.9	3.6
硝子体	4	1.34	-5.9	16.79
網膜	5		-12.8	

α'	###	-10,000.00	-5,000.00	-1,000.00	-500.00	-250.00
f'	22.40	22.35	22.30	21.91	21.44	20.56
f	-16.77	-16.73	-16.69	-16.40	-16.05	-15.39
ε	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002

前側被写界深度

$D \backslash \alpha'$	###	-10,000.00	-5,000.00	-1,000.00	-500.00	-250.00
7.0	###	-2,056.2	-466.4	-17.4	-4.3	-1.1
4.0	###	-4,255.8	-877.9	-30.9	-7.7	-1.9
2.5	###	-9,149.5	-1,570.6	-50.4	-12.4	-3.1

後側被写界深度

$D \backslash \alpha'$	###	-10,000.00	-5,000.00	-1,000.00	-500.00	-250.00
7.0	###	1,456.3	392.9	16.8	4.3	1.1
4.0	###	2,297.2	649.1	29.1	7.4	1.9
2.5	###	3,229.7	963.3	45.8	11.8	3.0

被写界深度

$D \backslash \alpha'$	###	-10,000.00	-5,000.00	-1,000.00	-500.00	-250.00
7.0	-117,365.3	3,512.5	859.3	34.3	8.6	2.2
4.0	-67,065.9	6,553.0	1,527.0	60.0	15.1	3.8
2.5	-41,916.2	12,379.2	2,533.9	96.2	24.1	6.1

後側見掛被写界深度

$D \backslash \alpha'$	###	-10,000.00	-5,000.00	-1,000.00	-500.00	-250.00
7.0	100.0%	14.6%	7.9%	1.7%	0.9%	0.4%
4.0	100.0%	23.0%	13.0%	2.9%	1.5%	0.8%
2.5	100.0%	32.3%	19.3%	4.6%	2.4%	1.2%

見掛被写界深度

$D \backslash \alpha'$	###	-10,000.00	-5,000.00	-1,000.00	-500.00	-250.00
7.0	0.0%	35.1%	17.2%	3.4%	1.7%	0.9%
4.0	0.0%	65.5%	30.5%	6.0%	3.0%	1.5%
2.5	0.0%	123.8%	50.7%	9.6%	4.8%	2.4%

α' : 視点

f : 前側焦点距離

f : 後側焦点距離

ε : 許容錯乱円

D : 瞳孔径

* 単位 of 指定 of 無いものは全て mm

まとめ

以上から、被写界深度が深くなるための条件は以下の4つとなる。

- ・倍率が低い
- ・対物レンズと接眼レンズの焦点距離が短い
- ・射出瞳径(若しくは瞳孔)が小さい
- ・目のピントを遠点に合わせる

これらは収差に関しては考慮していない。ピントからずれた位置での収差量や生理光学を考慮することにより新しい発見があるのではないかと思考される。

冒頭で書いた、焦点距離の長いレンズの組み合わせの方が、深度はやや深くなる、という説とは、寧ろ逆の結果が出た。今後、実験により理論の正当性を検証していきたい。

望遠鏡は、被写界深度が深くなることによって一度に観察できる範囲が広がり、また、フォーカシング(ピント合わせ)が楽に行えるようになる。特に、雑木林の中での野鳥観察等においては、被写界深度が深いことは非常に有用であると予想される。

以上

参考文献 『レンズ設計』 高橋友刀 著 東海大学出版会 1994 年

『第5・光の鉛筆』 鶴田匡夫 著 新技術コミュニケーションズ

初版 2000 年 第2版 2004 年